Matematyka dla inżynierów

Ilona Iglewska–Nowak

1 października 2020 r.

Funkcje

Funkcja rzeczywista zmiennej rzeczywistej, własności funkcji, funkcja złożona i odwrotna

Definicja 1 Funkcją *nazywamy jednoznaczne przyporządkowanie każdemu elementowi pewnego zbioru* $X = D(f)$*, zwanego* dziedziną*, dokładnie jednego elementu pewnego zbioru* Y*, zwanego* przeciwdziedziną*. Oznaczamy to*

$$f : X \to Y,$$

gdzie f *jest nazwą funkcji. Jeśli* $X, Y \subseteq \mathbb{R}$*, mówimy o* funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej. $x \in X$ *nazywamy* zmienną niezależną*, a* $y \in Y$ *–* zmienną zależną*. Zbiór takich elementów przeciwdziedziny, które są przyporządkowane pewnym elementom dziedziny, nazywamy* obrazem (zbiorem wartości) funkcji *i oznaczamy* $\operatorname{ima} f$,

$$\operatorname{ima} f = \{y \in Y \mid f(x) = y \text{ dla pewnego } x \in X\}.$$

Uwaga 2 *Funkcja jest „maszyną", która z elementów swojej dziedziny „produkuje" elementy przeciwdziedziny. Aby podkreślić ten dynamizm, funkcję zapisuje sie z użyciem strzałek:*

$$\begin{aligned} f : X &\to Y, \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Można również mówić o funkcji f*, pamiętając, że chodzi o pewien przepis na przekształcenie liczb. Zapis wzoru funkcji, np.* $f : x \mapsto x^2$ *skraca się czasem do* $f(x) = x^2$*, natomiast samo* $f(x)$ *nie jest funkcją, tylko wartością funkcji dla zmiennej o wartości* x*.*

Przykład 3 *Funkcja może być zadana na różne sposoby, np.*

1. *za pomocą wzoru,* $y(x) = x^3 - x^2 + \log x$*,*
2. *za pomocą tablicy, np. temperatura gazu w zależności od ciśnienia dla kilku pomiarów,*
3. *za pomocą opisu, np. funkcja przyporządkowuje liczbom wymiernym* 1*, a niewymiernym* 0*.*

Uwaga 4 *Często nie podaje się dziedziny ani przeciwdziedziny funkcji. Wówczas jako dziedzinę bierze się największy zbiór, dla którego funkcja jest zdefiniowana (chyba że z kontekstu wynika inaczej), a jako przeciwdziedzinę – obraz funkcji lub jakiś zbiór go zawierający, w zależności od kontekstu.*

Definicja 5 1. *Funkcję nazywamy* iniekcją *bądź* funkcją różnowartościową, *jeśli (każdym) dwóm różnym elementom dziedziny przyporządkowane są dwa różne elementy przeciwdziedziny:*

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

lub równoważnie:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

2. *Funkcję nazywamy* suriekcją *lub* funkcją na, *jeśli każdy element przeciwdziedziny jest* obrazem *pewnego elementu dziedziny, tzn. przeciwdziedzina jest obrazem funkcji:*

$$Y = \operatorname{ima} f.$$

3. *Funkcję nazywamy* bijekcją *albo* funkcją wzajemnie jednoznaczną, *jeśli jest jednocześnie iniekcją i suriekcją.*

Przykład 6 1. *Funkcja*

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

nie jest ani iniekcją, ani suriekcją.

2. *Funkcja*

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\to [0,\infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

nie jest iniekcją, ale jest suriekcją.

3. *Funkcja*

$$\begin{aligned} f:\ [0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

jest inieksciją, ale nie jest suriekcją.

4. *Funkcja*

$$\begin{aligned} f:\ [0,\infty) &\to [0,\infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

jest bijekcją.

Definicja 7 1. *Funkcję f nazywamy* monotonicznie rosnącą, *jeśli*

$$x_2 > x_1 \implies f(x_2) > f(x_1).$$

2. *Funkcję f nazywamy* monotonicznie niemalejącą, *jeśli*

$$x_2 > x_1 \implies f(x_2) \geq f(x_1).$$

3. *Funkcję f nazywamy* monotonicznie malejącą, *jeśli*

$$x_2 > x_1 \implies f(x_2) < f(x_1).$$

4. *Funkcję f nazywamy* monotonicznie nierosnącą, *jeśli*

$$x_2 > x_1 \implies f(x_2) \leq f(x_1).$$

Przykład 8 *Funkcja $f(x) = x^3$ jest monotonicznie rosnąca, funkcja $f(x) = x^2$ jest monotonicznie malejąca w przedziale $(-\infty, 0]$ i monotonicznie rosnąca w przedziale $[0, \infty)$. Funkcja $f(x) = [x]$ (*entier*, przyporządkowująca każdej liczbie rzeczywistej x największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą x) jest niemalejąca.*

Definicja 9 1. *Funkcję f nazywamy* wypukłą w dół (wypukłą) w przedziale *I, jeśli dla dowolnych x_1, $x_2 \in I$ zachodzi*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

2. *Funkcję f nazywamy* wypukłą w górę (wklęsłą) w przedziale *I, jeśli dla dowolnych x_1, $x_2 \in I$ zachodzi*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Uwaga 10 *Wypukłość w dół można również scharakteryzować następująco:*

$$\forall \alpha \in (0, 1) : \ f(\alpha \cdot x_1 + (1 - \alpha) \cdot x_2) \leq \alpha \cdot f(x_1) + (1 - \alpha) \cdot f(x_2).$$

Podobnie dla wypukłości w górę. Wykres funkcji f wypukłej w dół w przedziale $[a, b]$ leży całkowicie poniżej lub na siecznej, łączącej punkty $(a, f(a))$ oraz $(b, f(b))$, natmiast wykres funkcji wypukłej w górę leży całkowicie powyżej lub na siecznej.

Przykład 11 1. *Funkcja liniowa jest wypukła zarówno w dół, jak i w górę w całej swej dziedzinie.*

2. *Funkcja kwadratowa o współczynniku kierunkowym dodatnim jest wypukła w dół w całej dziedzinie, a funkcja kwadratowa o współczynniku kierunkowym ujemnym jest wypukła w górę w całej dziedzinie.*

3. *Funkcja $x \mapsto x^3$ jest wypukła w górę w przedziale $(-\infty, 0]$, a wypukła w dół w przedziale $[0, \infty)$.*

Definicja 12 *Funkcję nazywamy* ograniczoną, *jeżeli istnieje takie $M \in \mathbb{R}_+$, że $\operatorname{ima} f \in [-M, M]$.*

Przykład 13 1. *Funkcja liniowa o współczynniku kierunkowym różnym od zera jest nieograniczona.*

2. *Wielomiany są nieograniczone.*

3. *Sinus jest ograniczony.*

4. $x \mapsto x - [x]$ *jest ograniczony.*

Definicja 14 *1. Funkcję* f *nazywamy* parzystą, *jeżeli dla każdego* x *z jej dziedziny zachodzi*

$$f(x) = f(-x).$$

2. Funkcję f *nazywamy* nieparzystą, *jeżeli dla każdego* x *z jej dziedziny zachodzi*

$$f(x) = -f(-x).$$

3. Funkcję f *nazywamy* okresową o okresie T, *jeżeli dla każdego* x *mamy*

$$f(x) = f(x + T). \tag{1}$$

Najmniejszą liczbę T, *dla której warunek* (1) *jest spełniony, nazywamy* okresem podstawowym.

Uwaga 15 *Dziedzina funkcji parzystej bądź nieparzystej musi być „symetryczna" względem zera. Dziedzina funkcji okresowej jest „okresowa" oraz nieograniczona.*

Przykład 16 *Sinus jest funkcją nieparzystą, cosinus parzystą, obie są okresowe o okresie* 2π, *tangens i cotangens są okresowe o okresie* π. *Funkcja* $x \mapsto x^2$ *jest parzysta, a funkcja* $x \mapsto x^3$ *jest nieparzysta.*

Uwaga 17 *Aby sprawdzić, że funkcja* f nie *jest parzysta (lub nieparzysta), wystarczy wykazać* $f(a) \neq f(-a)$ *(lub* $f(a) \neq -f(-a)$*) dla jednej wartości argumentu* a.

Definicja 18 *Niech dane będą funkcje* $f : D(f) \to Y(f)$ *oraz* $g : D(g) \to Y(g)$. *Wówczas*

1. suma $f + g$, różnica $f - g$ *i* iloczyn $f \cdot g$ *funkcji* f *i* g *są zdefiniowane na zbiorze* $D(f) \cap D(g)$ *jako*

$$\begin{aligned}(f \pm g)(x) &= f(x) \pm g(x),\\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x).\end{aligned}$$

2. Iloraz funkcji f/g *jest zdefiniowany na zbiorze* $D(f) \cap D(g) \setminus \{x \in D(g) : g(x) = 0\}$ *jako*

$$f/g(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

3. Jeżeli $Y(f) \subseteq D(g)$, *funkcję*

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

nazywamy złożeniem (superpozycją) *funkcji* f *i* g *bądź* funkcją złożoną (superponowaną). *Funkcję* g *nazywa się* funkcją zewnętrzną, *a funkcję* f funkcją wewnętrzną *funkcji złożonej.*

Przykład 19 *Różnica funkcji* $f(x) = \frac{1}{x}$ *i* $g(x) = \frac{1}{x}$ *jest zdefiniowana na zbiorze* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *i równa* 0.

Przykład 20 *Niech dane będą funkcje*

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

i

$$g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$$
$$x \mapsto \frac{x-2}{x-1}.$$

Suma, różnica i iloczyn zdefiniowane są na zbiorze $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$ *jako*

$$(f+g)(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{x-2}{x-1},$$
$$(f-g)(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{x-2}{x-1},$$
$$(fg)(x) = \frac{x-2}{x^2(x-1)},$$

natomiast iloraz zdefiniowany jest na zbiorze $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$ *(ponieważ* $g(2) = 0$*) jako*

$$(f/g)(x) = \frac{x-1}{x^2(x-2)}.$$

Funkcji tych nie możemy superponować, ponieważ $Y(f) \not\subseteq D(g)$*. Innymi słowy, w zbiorze wartości funkcji* f *jest liczba* 1*, która nie należy do dziedziny funkcji* g*. Podobnie nie istnieje złożenie* $f \circ g$*.*

Przykład 21 *Niech dane będą funkcje*

$$f:\ \mathbb{R} \to [-1, 1],\ x \mapsto \sin(x),$$
$$g:\ (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log(x),$$
$$\text{oraz} \quad h : \mathbb{R} \to [0, \infty),\ x \mapsto x^2.$$

Wówczas

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\log x) = \sin(\log x) \quad \textit{lub}$$
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sin(g(x)) = \sin(\log x),$$

$g \circ f$ *nie istnieje, ponieważ argumentem logarytmu może być tylko liczba dodatnia, a wartości sinusa są również ujemne,*

$$f \circ h(x) = f(h(x)) = f(x^2) = \sin(x^2) \quad \textit{lub}$$
$$f \circ h(x) = f(h(x)) = \sin(h(x)) = \sin(x^2),$$
$$h \circ f(x) = h(f(x)) = h(\sin x) = (\sin x)^2 \quad \textit{lub}$$
$$h \circ f(x) = h(f(x)) = (f(x))^2 = (\sin x)^2,$$

$g \circ h$ *nie istnieje, ponieważ argumentem logarytmu może być tylko liczba dodatnia, a wartością kwadratu jest również zero,*

$$h \circ g(x) = h(g(x)) = h(\log x) = (\log x)^2 \quad \textit{lub}$$
$$h \circ g(x) = h(g(x)) = (g(x))^2 = (\log x)^2.$$

Przykład 22 *Iloczyn funkcji $f: x \mapsto x$ oraz $g: x \mapsto \frac{1}{x}$ dany jest wzorem*

$$f \cdot g: x \mapsto 1,$$

ale zdefiniowany „tylko" na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (ponieważ na tym zbiorze zdefiniowana jest funkcja g).

Definicja 23 *Niech dana będzie funkcja $f: X \to Y$ oraz zbiory $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$.*

1. Obrazem *zbioru A nazywamy zbiór wartości funkcji dla argumentów ze zbioru A:*

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

2. Przeciwobrazem *zbioru B jest zbiór tych wszystkich argumentów, dla których wartości funkcji należą do zbioru B:*

$$f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}.$$

Jeśli zbiór jest jednoelementowy, możemy pisać $f^{-1}(b)$ zamiast $f^{-1}(\{b\})$.

Przykład 24 *Niech*

$$\begin{aligned} f: \{-2,-1,0,1,3\} &\to \{0,1,4,5,9\}, \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

Wówczas

$$\begin{aligned} &f(\{-1,1\}) = f(\{1\}) = \{1\}, \\ &f(\{-2,3\}) = \{4,9\}, \\ &f^{-1}(\{0,1\}) = \{-1,0,1\}, \\ &f^{-1}(\{1\}) = \{-1,1\}, \\ &f^{-1}(\{5\}) = \varnothing, \\ &f^{-1}(\{4\}) = \{-2\}, \\ &f^{-1}(\{0\}) = \{0\}. \end{aligned}$$

Definicja 25 *Niech A i B będą podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych. Funkcja $f: A \to B$ jest* odwracalna, *jeśli istnieje funkcja $f^{-1}: B \to A$ (zwana* funkcją odwrotną do f*), taka że $f \circ f^{-1} = Id_B$ oraz $f^{-1} \circ f = Id_A$. Symbol Id_S oznacza* funkcję identycznościową *na zbiorze S: $Id_S(x) = x$.*

Twierdzenie 26 *Niech A i B będą podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych. Funkcja f : $A \to B$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest bijekcją.*

To znaczy f^{-1} jest *funkcją* wtedy i tylko wtedy, gdy f jest wzajemnie jednoznaczna.

Przykład 27 *1. Funkcją odwrotną do*

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

jest f, ponieważ $f(D(f)) = Y(f)$ oraz $f(f(x)) = f(x) = x$.

2. *Funkcja*

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

nie jest odwracalna, bo nie jest suriekcją.

3. *Funkcją odwrotną do*

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

jest

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Zachodzi $Y(f) = X(f^{-1})$, $Y(f^{-1}) = D(f)$ *oraz*

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1}(x) &= f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x, \\ f^{-1} \circ f(x) &= f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x \quad (\text{dla } x \in \mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

4. *Funkcją odwrotną do*

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}_- &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

jest

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_- \\ x &\mapsto -\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Zachodzi $Y(f) = \mathbb{R}_+ = X(f^{-1})$, $Y(f^{-1}) = \mathbb{R}_- = D(f)$ *oraz*

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1}(x) &= f(f^{-1}(x)) = f(-\sqrt{x}) = (-\sqrt{x})^2 = x, \\ f^{-1} \circ f(x) &= f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = -\sqrt{x^2} = -|x| = x \quad (\text{dla } x \in \mathbb{R}_-). \end{aligned}$$

Definicja 28 Miejscem zerowym funkcji *nazywamy argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość* 0.

Uwaga 29 *Miejsce zerowe jest liczbą, a nie parą liczb.*

Przykład 30 *Znajdź miejsce zerowe funkcji* $f(x) = 2x + 3$.

Rozwiązanie Należy rozwiązać równanie $f(x) = 0$:

$$2x + 3 = 0 \iff 2x = -3 \iff x = -\frac{3}{2}.$$

Miejscem zerowym tej funkcji jest $-\frac{3}{2}$.

Przegląd niektórych funkcji elementarnych

Funkcja potęgowa

Definicja 31 *Niech a będzie dowolną stałą. Funkcję*

$$x \mapsto x^a,$$

nazywamy funkcją potęgową. *Dziedziną funkcji potęgowej $f(x) = x^a$ jest*

- $\mathbb{R}$, *jeżeli $a \in \mathbb{N}_0$,*
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, *jeżeli $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$,*
- $\mathbb{R}$, *jeżeli a jest liczbą wymierną postaci $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$ względnie pierwsze, n nieparzyste,*
- $[0, \infty)$, *jeżeli a jest liczbą wymierną postaci $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$ względnie pierwsze, n parzyste,*
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, *jeżeli a jest liczbą wymierną postaci $-\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$ względnie pierwsze, n nieparzyste,*
- $\mathbb{R}_+$ *w pozostałych przypadkach.*

Przykład 32

$$x \mapsto x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \qquad x \mapsto x^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln x}$$

Funkcja potęgowa jest na $\mathbb{R}_+$ monotonicznie rosnąca dla $a > 0$, stała dla $a = 0$ i monotonicznie malejąca dla $a < 0$. Jest wypukła dla $a \le 0$ oraz dla $a \ge 1$, wklęsła dla $a \in [0, 1]$. W każdym z tych wypadków wartość funkcji w jedynce wynosi jeden ($1^a = 1$). Dla wykładnikó całkowitych parzystych jest parzysta, a dla nieparzystych i ułamkowych – nieparzysta.

Uwaga 33 *Zachodzą następujące zależności:*

$$\begin{aligned}
(a \cdot b)^x &= a^x \cdot b^x, \\
\left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x}, \\
a^{x+y} &= a^x \cdot a^y, \\
a^{x-y} &= \frac{a^x}{a^y}, \\
a^{x \cdot y} &= (a^x)^y.
\end{aligned}$$

Po podstawieniu $x = 0$ do czwartego wzoru wynika stąd:

$$a^{-y} = \frac{1}{a^y}.$$

Przykład 34

$$\begin{aligned}
&[(a^{1/2} + b^{1/2}) \cdot (a^{1/2} + 5b^{1/2}) - (a^{1/2} + 2b^{1/2}) \cdot (a^{1/2} - 2b^{1/2})] : \left(2a + 3\sqrt{ab}\right) \\
&= [a + 6a^{1/2}b^{1/2} + 5b - (a - 4b)] : \left(2a + 3\sqrt{ab}\right) = \frac{6\sqrt{ab} + 9b}{2a + 3\sqrt{ab}} \\
&= \frac{3\sqrt{b}\,(2\sqrt{a} + 3\sqrt{b})}{\sqrt{a}\,(2\sqrt{a} + 3\sqrt{b})} = 3\sqrt{\frac{b}{a}} \qquad (a > 0,\ b > 0)
\end{aligned}$$

Funkcja wykładnicza

Definicja 35 *Niech a będzie stałą większą od 0 i różną od 1. Funkcję*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+, \\ x &\mapsto a^x, \end{aligned}$$

nazywamy funkcją wykładniczą.

Jeśli $a > 1$, funkcja jest monotonicznie rosnąca, jeśli $a < 1$, to jest ona monotonicznie malejąca. W obu przypadkach zachodzi $f(0) = 1$. Wykresy funkcji $f(x) = a^x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ są do siebie symetryczne względem osi Y. Wykres funkcji wykładniczej jest wypukły w dół.

Uwaga 36 *Szczególnym przypadkiem funkcji wykładniczej jest funkcja $x \mapsto e^x$, gdzie $e \approx$ 2,7182818 jest podstawą logarytmu naturalnego. Funkcję tę oznaczamy również jako $x \mapsto \exp(x)$.*

Definicja 37 Liczba *e jest granicą ciągu*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

przy $n \to \infty$ i wynosi około 2,7182818. Stanowi ona podstawę logartymu naturalnego*.*

0.0.1 Funkcja logarytmiczna

Definicja 38 Logarytm o podstawie $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ *to funkcja ze zbioru $\mathbb{R}_+$ na $\mathbb{R}$, która każdej liczbie x przyporządkowuje y takie, że*

$$a^y = x.$$

Zapisujemy to jako

$$y = \log_a x.$$

Przykład 39

$$\begin{aligned} \log_3 27 = 3 &\quad \textit{ponieważ} \quad 3^3 = 27, \\ \log_2 1 = 0 &\quad \textit{ponieważ} \quad 2^0 = 1, \\ \log_4 \frac{1}{4} = -1 &\quad \textit{ponieważ} \quad 4^{-1} = \frac{1}{4}, \\ \log_{49} 7 = \frac{1}{2} &\quad \textit{ponieważ} \quad 49^{\frac{1}{2}} = 7. \end{aligned}$$

Logarytm jest funkcją monotonicznie rosnącą i ma wklęsły wykres, jeśli $a > 1$, natomiast w przypadku, gdy $a < 1$, jest monotonicznie malejący o wypukłym wykresie. W obu przypadkach (zauważ, że $a \neq 1$ z definicji) mamy $\log 1 = 0$. Bezpośrednio z definicji wynika

$$a^{\log_a x} = x.$$

Twierdzenie 40 *Zachodzą następujące zależności (przy założeniu, że te wyrażenia mają sens):*

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$,

2. $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$,

3. $\log_a(1/y) = -\log_a y$,

4. $\log_a(x^b) = b \log_a x$,

5. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ *jeśli* $b \neq 1$,

6. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$.

Przykład 41 *Dowód wzoru* $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$*: Oznaczmy* $\log_a x$ *przez* X*, a* $\log_a y$ *przez* Y*, wówczas:*

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{X+Y} = a^X \cdot a^Y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y,$$

a zatem

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y).$$

Przykład 42

$$\log_2 12 = \log_2(2^2 \cdot 3) = \log_2 2^2 + \log_2 3 = 2 + \log_2 3,$$
$$\log_{7\sqrt{7}} 7 = \frac{1}{\log_7 7\sqrt{7}} = \frac{1}{\log_7(7 \cdot 7^{1/2})} = \frac{1}{\log_7(7^{1+1/2})} = \frac{1}{\log_7 7^{3/2}} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}.$$

Definicja 43 Logarytm naturalny *to logarytm o podstawie* e*, oznaczany symbolem* ln. Logarytm dziesiętny *to logarytm o podstawie* 10*, oznaczany symbolem* lg.

Przykład 44

$$\ln x = \ln 10 \cdot \lg x \approx 2{,}302585093 \cdot \lg x$$
$$\lg x = \lg e \cdot \ln x \approx 0{,}434294482 \cdot \ln x$$

0.0.2 Funkcje trygonometryczne

Definicja 45 *Jeżeli płaski kąt skierowany* α *ustawi się tak, że jego wierzchołek znajduje się w początku prostokątnego układu współrzędnych* O*, pierwsze ramię kąta pokrywa się z pierwszą dodatnią półosią układu, a jego drugie ramię jest dowolną półprostą leżącą w płaszczyźnie układu, wychodzącą z punktu* O *oraz zawierającą pewien punkt* $M = (x, y)$*, którego odległość od* O *wynosi* 1*, to* funkcje trygonometryczne *kąta skierowanego* α *będą określone wzorami:*

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= y && \text{(sinuns)}, \\
\cos\alpha &= x && \text{(cosinuns)}, \\
\operatorname{tg}\alpha &= \frac{y}{x} && \textit{dla } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \qquad \text{(tangens)}, \\
\operatorname{ctg}\alpha &= \frac{x}{y} && \textit{dla } \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \qquad \text{(cotangens)},
\end{aligned}$$

Sinus jest funkcją nieparzystą, ograniczoną, o zakresie wartości $[-1,1]$, okresową o okresie 2π, rosnącą w przedziałach $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$, malejącą w przedziałach $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$, wklęsłą w przedziałach $[2k\pi, \pi+2k\pi]$, wypukłą w przedziałach $[\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Cosinus jest funkcją parzystą, ograniczoną, o zakresie wartości $[-1,1]$, okresową o okresie 2π, rosnącą w przedziałach $[\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi]$, malejącą w przedziałach $[2k\pi, \pi+2k\pi]$, wklęsłą w przedziałach $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$, wypukłą w przedziałach $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Tangens jest funkcją nieparzystą, nieograniczoną, okresową o okresie π, rosnącą w przedziałach $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, wklęsłą w przedziałach $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, k\pi\right]$, wypukłą w przedziałach $\left[k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Cotangens jest funkcją nieparzystą, nieograniczoną, okresową o okresie π, malejącą w przedziałach $(k\pi, \pi+k\pi)$, wklęsłą w przedziałach $\left[\frac{\pi}{2}+k\pi, \pi+k\pi\right)$, wypukłą w przedziałach $\left(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla niektórych kątów pierwszej ćwiartki:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{0}{1}=0$	$\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}=1$	$\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}=\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi zachodzą m.in. następujące zależności:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\\
&\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\
&\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\\
&\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,\\
&\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,\\
&\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1\mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\\
&\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\\
&\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\\
&\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha},\\
&\sin\alpha\pm\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2},\\
&\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\
&\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},\\
&\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.
\end{aligned}
$$

Korzystając z nich, można wyprowadzić zależności między funkcjami trygonometrycznymi niektórych kątów:

ϕ	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\phi$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\phi$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\phi$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\phi$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Przykład 46 *Wyprowadź wzór na cosinus połowy kąta.*

Rozwiązanie.

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\\
&= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\\
&\Longrightarrow \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha+1}{2} \Longrightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}
\end{aligned}
$$

Przykład 47 *Rozwiąż równania:*

1. $\sin 2x = 1$,
2. $\frac{\cos x}{1+\operatorname{tg} x} = 0$,
3. $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x} = 0$,
4. $5\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}x - \frac{\pi}{5}\right) = -5$,
5. $\sin x + \cos x = 1$,
6. $2\cos^2 x - \sin 2x = 0$.

0.0.3 Funkcje cyklometryczne

Definicja 48 Funkcje cyklometryczne (kołowe) *to funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych ograniczonych do pewnych przedziałów. Funkcje trygonometryczne rozpatrywane w tych przedziałach są różnowartościowe i mają funkcje odwrotne.*

1. arcus sinus arcsin *jest funkcją odwrotną do funkcji sinus rozpatrywanej na przedziale* $[-\pi/2, \pi/2]$. *W przedziale tym sinus jest funkcją rosnącą (zatem różnowartościową) – wobec czego ma funkcję odwrotną, która jest określona na przedziale* $[-1, 1]$ *(czyli obrazie przedziału* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *względem funkcji* sin*).*

2. arcus cosinus arccos *jest funkcją odwrotną do funkcji cosinus rozpatrywanej na przedziale* $[0, \pi]$. *W przedziale tym cosinus jest funkcją malejącą (zatem różnowartościową) – wobec czego ma funkcję odwrotną, która jest określona na przedziale* $[-1, 1]$ *(czyli obrazie przedziału* $[0, \pi]$ *względem funkcji* cos*).*

3. arcus tangens arctg *jest funkcją odwrotną do funkcji tangens rozpatrywanej na przedziale* $(-\pi/2, \pi/2)$. *W przedziale tym tangens jest funkcją rosnącą (zatem różnowartościową) – wobec czego ma funkcję odwrotną, która jest określona na przedziale* $(-\infty, +\infty)$ *(czyli obrazie przedziału* $(-\pi/2, \pi/2)$ *względem funkcji* tg *).*

4. arcus cotangens arcctg *jest funkcją odwrotną do funkcji cotangens rozpatrywanej na przedziale* $(0, \pi)$. *W przedziale tym cotangens jest funkcją malejącą (zatem różnowartościową), wobec czego ma funkcję odwrotną, która jest określona na przedziale* $(-\infty, +\infty)$ *(czyli obrazie przedziału* $(0, \pi)$ *względem funkcji* ctg *).*

Ciągi i ich granice

Definicja 49 *Funkcję*

$$a:\ \mathbb{N}\to A,$$

gdzie A jest zbiorem liczbowym (np. $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{Z}$) nazywamy nieskończonym ciągiem liczbowym. *Zamiast $a(n)$ piszemy a_n i nazywamy te liczby* elementami (wyrazami) ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Przykład 50 1. *Liczby naturalne ustawione w kolejności stanowią ciąg.*

2. *Ciągiem są liczby parzyste ustawione w kolejności:*

$$2,4,6,8,\ldots,2n,\ldots.$$

3. *Ciąg może być dany wzorem, np. $a_n=2n^2+3n-1$.*

4. *Elementy ciągu mogą być sobie równe:*

$$1,1,2,2,4,4,8,8,\ldots,\left[\frac{n+1}{2}\right],\ldots.$$

Definicja 51 1. *Ciąg jest* malejący, *jeśli $a_{n+1}<a_n$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$.*

2. *Ciąg jest* nierosnący, *jeśli $a_{n+1}\le a_n$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$.*

3. *Ciąg jest* rosnący, *jeśli $a_{n+1}>a_n$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$.*

4. *Ciąg jest* niemalejący, *jeśli $a_{n+1}\ge a_n$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$.*

5. *Ciąg jest* stały, *jeśli $a_n=c$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$.*

6. *Ciąg jest* ograniczny z góry, *jeśli istnieje $M\in\mathbb{R}$ takie, że $a_n<M$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$.*

7. *Ciąg jest* ograniczny z dołu, *jeśli istnieje $M\in\mathbb{R}$ takie, że $a_n>M$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$.*

8. *Ciąg jest* ograniczny, *jeśli jest ograniczony z góry i z dołu.*

Uwaga 52 *Ciąg jest* ograniczny *jeśli istnieje $M>0$ takie, że $|a_n|<M$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$.*

Przykład 53 1. *Ciąg*

$$-2,-3,-6,-7,-10,-11,-14,-15,\ldots,-2n+(n+1)_{mod\ 2},\ldots$$

jest malejący.

2. *Ciąg*
$$3, 3, 2, 2, 1, 1, 0, 0, -1, -1, \dots, 4 - \left[\frac{n+1}{2}\right], \dots$$
jest nierosnący.

3. *Ciąg*
$$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n-4, \dots$$
jest rosnący.

4. *Ciąg*
$$1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, \dots, n-6, \dots$$
jest niemalejący.

5. *Ciąg*
$$-3, -3, -3, -3, -3, -3, \dots, -3, \dots$$
jest stały.

6. *Każdy ciąg stały jest ograniczony.*

Definicja 54 Podciąg *jest to ciąg powstały poprzez wybranie pewnej liczby wyrazów ciągu wyjściowego.*

Definicja 55 1. *Nieskończony ciąg* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę *a jeśli dla każdego (dowolnie małego)* $\epsilon > 0$ *istnieje indeks* n_0 *taki, że dla każdego elementu ciągu* a_n *o indeksie* n *większym niż* n_0 *zachodzi nierówność*
$$|a_n - a| < \epsilon \quad (\textit{lub } a - \epsilon < a_n < a + \epsilon).$$
Mówimy również: ciąg (a_n) dąży do (jest zbieżny do) *granicy a i zapisujemy*
$$a_n \to a \textit{ dla } n \to \infty, \quad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \quad \textit{lub} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

2. *Nieskończony ciąg* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę ∞ *jeśli dla każdego (dowolnie dużego)* $M > 0$ *istnieje indeks* n_0 *taki, że dla każdego elementu ciągu* a_n *o indeksie* n *większym niż* n_0 *zachodzi nierówność*
$$a_n > M.$$
Mówimy również: ciąg (a_n) dąży do (jest rozbieżny do) *plus nieskończoności i zapisujemy*
$$a_n \to +\infty \textit{ dla } n \to \infty, \quad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \textit{lub} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

3. *Nieskończony ciąg* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę $-\infty$ *jeśli dla każdego (dowolnie dużego)* $M > 0$ *istnieje indeks* n_0 *taki, że dla każdego elementu ciągu* a_n *o indeksie* n *większym niż* n_0 *zachodzi nierówność*
$$a_n < -M$$
Mówimy również: ciąg (a_n) dąży do (jest rozbieżny do) *minus nieskończoności i zapisujemy*
$$a_n \to -\infty \textit{ dla } n \to \infty, \quad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad \textit{lub} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

4. *Ciągi o granicy skończonej nazywamy* zbieżnymi. *Wszystkie pozostałe ciągi nazywamy* rozbieżnymi. *Spośród ciągów rozbieżnych wyróżniamy ciągi rozbieżne do plus nieskończoności i do minus nieskończoności.*

Przykład 56 1. *Ciąg* $1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, \ldots, (n)_{mod\ 3}, \ldots$ *nie ma granicy.*

2. *Ciąg* $\left(\frac{1}{n}\right)$ *jest zbieżny do* 0, *ponieważ dla każdego* $\epsilon > 0$ *można wyznaczyć indeks* $n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon}\right]$, *taki że dla każdego* $n > n_0$ *zachodzi* $n > \left[\frac{1}{\epsilon}\right]$, *a zatem* $n > \frac{1}{\epsilon}$. *Stąd wynika, że dla tych indeksów* n *mamy*

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{1/\epsilon} = \epsilon.$$

3. *Ciąg dany wzorem* $a_n = n^2 - n + 1$ *jest rozbieżny do nieskończoności. Mamy:*

$$a_n - n = n^2 - n + 1 - n = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 \geq 0,$$

i stąd $a_n \geq n$, *a zatem dla każdego* $n > M$ *mamy* $a_n > M$.

4. $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Twierdzenie 57 *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, *to*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$,

2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, *jeśli* $b_n \neq 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $b \neq 0$.

Uwaga 58 *Warunkiem zachodzenia powyższych równości jest istnienie skończonych granic ciągów.*

Przykład 59 1. *Dla ciągów* $a_n = n$ *oraz* $b_n = -n$ *mamy* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$, *choć granice tych ciągów nie istnieją.*

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2 + \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 2 + 3 \cdot 0 = 2$

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5n+1}{n^2-n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1+0+0}{1-0+0} = 1$

Twierdzenie 60 1. *Jeżeli ciąg jest zbieżny, to ma dokładnie jedną granicę.*

2. *Jeżeli ciąg jest zbieżny, to jest ograniczony.*

3. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

4. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \implies \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

5. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *oraz ciąg* (b_n) *jest ograniczony, to* $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$.

6. *Jeżeli ciąg jest monotoniczny i ograniczony, to jest zbieżny.*

7. $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$,

8. $\lim_{n\to\infty} a_n^c = (\lim_{n\to\infty} a_n)^c$, *jeśli* $a_n > 0$ *dla każdego* n *i* $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$.

Przykład 61 *1.* $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, *czyli* $(a_n) = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots\right)$. *Wówczas*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2. $a_n = -2 + \frac{(-1)^n}{n}$, *czyli* $(a_n) = \left(-3, -1\frac{1}{2}, -2\frac{1}{3}, -1\frac{3}{4}, -2\frac{1}{5}, \dots\right)$. *Wówczas*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -2, \qquad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 2$$
$$(3a_n) = \left(-9, -4\frac{1}{2}, -7, -5\frac{1}{4}, -6\frac{3}{5}, -5\frac{1}{2}, -6\frac{3}{7}, -5\frac{5}{8}, -6\frac{1}{3}, \dots\right),$$
$$\lim_{n\to\infty}(3a_n) = -6 = 3\cdot(-2) = 3\lim_{n\to\infty} a_n$$

3. $a_n = \frac{1}{n}$, $(b_n) = (1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots)$

$$|a_n \cdot b_n| \le \frac{3}{n} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$$

Twierdzenie 62 ***(Twierdzenie o trzech ciągach)*** *Jeżeli ciągi* (a_n), (b_n) *oraz* (c_n) *spełniają warunki*

1. $\exists n_o \forall n \ge n_0 : \; a_n \le b_n \le c_n$,

2. $\lim_{n\to\infty} a_n = c = \lim_{n\to\infty} c_n$,

to $\lim_{n\to\infty} b_n = c$.

Przykład 63 *Udowodnij, że* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ *dla* $c > 0$.

Rozwiązanie.

1. Dla $c \ge 1$ mamy $c^\alpha \ge 1$ dla $\alpha > 0$. Zatem

$$\begin{aligned} 0 \le \sqrt[n]{c} - 1 &= \frac{(\sqrt[n]{c}-1)\cdot((\sqrt[n]{c})^{n-1} + (\sqrt[n]{c})^{n-2} + \dots + \sqrt[n]{c} + 1)}{(\sqrt[n]{c})^{n-1} + (\sqrt[n]{c})^{n-2} + \dots + \sqrt[n]{c} + 1} \\ &= \frac{c-1}{(\sqrt[n]{c})^{n-1} + (\sqrt[n]{c})^{n-2} + \dots + \sqrt[n]{c} + 1} \le \frac{c-1}{\underbrace{1+1+\dots+1+1}_{n\times}} \\ &= \frac{c-1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Stąd $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{c} - 1) = 0$, czyli $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

2. Dla $c < 1$ mamy $\frac{1}{c} > 1$, stąd

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{1/c}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1/c}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Przykład 64 *Oblicz* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\sqrt[n]{4^n} \le \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \le \sqrt[n]{4^n + 4^n + 4^n} = \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{4^n}.$$

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ dla dowolnego $c > 0$ oraz $\sqrt[n]{4^n} = 4$, mamy

$$4 \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \le 1 \cdot 4,$$

a zatem $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} = 4$.

Twierdzenie 65 *Jeżeli ciągi* (a_n) *oraz* (b_n) *spełniają warunki*

1. $\exists n_0 \forall n \ge n_0 : a_n \le b_n$,
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *(lub* $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$*),*

wówczas $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ *(odpowiednio* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$*).*

Przykład 66

$$n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \ge n - 1 - 2 = n - 3 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Definicja 67 *Wyrażenia*

$$[\infty - \infty], [0 \cdot \infty], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [1^\infty], [0^0], [\infty^0]$$

nazywamy wyrażeniami nieoznaczonymi. *Ich wartości zależą od postaci tworzących je ciągów.*

Przykład 68

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n-1}{n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n-3-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \infty$,
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n-1}{n^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1-0-0}{1+0} = 1$,
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}} = 0$,
4. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \left[\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2 = e^2$,
5. $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n-1+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e}$,
6. $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e \cdot \frac{1}{e} = 1$.

Twierdzenie 69

1. *Jeżeli licznik i mianownik ułamka są wielomianami tego samego stopnia względem zmiennej naturalnej* n*, to granica ułamka przy* $n \to \infty$ *równa się stosunkowi współczynników przy najwyższych potęgach* n*.*
2. *Jeżeli mianownik ułamka jest wielomianem względem zmiennej naturalnej* n *stopnia wyższego niż licznik, to granica takiego ułamnka przy* $n \to \infty$ *równa się zeru.*
3. *Jeżeli mianownik ułamka jest wielomianem względem zmiennej naturalnej* n *stopnia niższego niż licznik, to granica takiego ułamnka przy* $n \to \infty$ *równa się plus lub minus nieskończoności w zależności od znaku ilorazu współczynników przy najwyższych potęgach* n*.*

Szeregi

Definicja 70 *Niech* (a_n) *będzie ciągiem. Wówczas liczbę*

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

nazywamy jego n*-tą* sumą cząstkową*, a ciąg sum cząstkowych nazywamy* szeregiem *i oznaczamy przez* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Element* a_n *nazywamy* wyrazem ogólnym *szeregu. Jeśli* $\lim_{n\to\infty} S_n$ *istnieje, mówimy, że* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest* szeregiem zbieżnym *i oznaczamy* $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (suma szeregu)*; zbieżność szeregu oznaczamy symbolem* $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| < \infty$ *(można opuścić wartość bezwzględną, jeśli jest to szereg o wyrazach dodatnich). Szereg, który nie jest zbieżny, nazywamy* rozbieżnym. *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, dla którego zachodzi* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$*, nazywamy* zbieżnym bezwzględnie*, natomiast taki, dla którego* $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| < \infty$*, ale* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$*,* zbieżnym warunkowo.

Przykład 71

1. *Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + \cdots + n + \ldots$$

jest rozbieżny do nieskończoności.

2. *Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} -n^2 = -1 - 4 - 9 - 16 - \cdots - n^2 - \ldots$$

jest rozbieżny do minus nieskończoności.

3. *Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \cdots + (-1)^n \cdot n + \ldots$$

jest rozbieżny.

4. *Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

(szereg geometryczny) jest zbieżny do 1.

Twierdzenie 72 *Warunkiem koniecznym zbieżności szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest to, aby jego wyraz ogólny* a_n *dążył do zera:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Przykład 73 *W trzech pierwszych punktach poprzedniego przykładu wyraz ogólny ciągu miał granicę niewłaściwą lub nie miał granicy.*

Uwaga 74 *Sam fakt, że wyraz ogólny szeregu dąży do zera, nie wystarcza, aby szereg był zbieżny.*

Przykład 75 *Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

nazywamy szeregiem harmonicznym. *Jego wyraz ogólny dąży do zera, natomiast sam szereg jest rozbieżny:*

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{\geq 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \dots$$
$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty$$

Twierdzenie 76 *Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i jego suma równa się s, a c jest stałą, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ jest zbieżny, a jego suma równa się cs. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to przy $c \neq 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ jest również rozbieżny.*

Przykład 77

1. *Szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ jest zbieżny do $\frac{a}{1-q}$, jeśli $-1 < q < 1$.*
2. *Jeżeli wyraz ogólny szeregu (jakiegokolwiek) jest zbieżny do stałej a, to szereg jest rozbieżny do minus nieskończoności, jeśli $a < 0$, do minus nieskończoności, jeśli $a > 0$, może być zbieżny, jeśli $a = 0$.*

Definicja 78 Szereg przemienny *to taki, w którym wyrazy dodatnie i ujemne występują regularnie na przemian, np.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots .$$

Kryteria zbieżności szeregów

Twierdzenie 79 ***(Kryterium porównawcze)*** *Jeżeli dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n \geq 0$, można wskazać taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, że począwszy od pewnego miejsca n_0 (tzn. dla każdego $n \geq n_0$) zachodzi $a_n \leq b_n$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest również zbieżny.*

Przykład 80 *Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots$$

jest zbieżny, ponieważ dla każdego n:

$$0 \leq \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n},$$

a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ jest geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$, a zatem zbieżny.

Twierdzenie 81 ***(Kryterium porównawcze)*** *Jeżeli dla szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *można wskazać taki szereg rozbieżny* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*, gdzie* $b_n \geq 0$*, że począwszy od pewnego miejsca* n_0 *(tzn. dla każdego* $n \geq n_0$*) zachodzi* $a_n \geq b_n$*, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest również rozbieżny.*

Przykład 82 *Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2} = 2 + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{3^2} + \dots$$

jest rozbieżny, ponieważ dla każdego n:

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{n^2},$$

a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *jest harmoniczny, a zatem rozbieżny.*

Uwaga 83 *Przy stosowaniu powyższych kryteriów należy dobrać szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *tak, aby jego zbieżność lub rozbieżność była łatwiejsza do zbadania niż zbieżność lub rozbieżność szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Twierdzenie 84 ***(Kryterium ilorazowe d'Alemberta)***

1. *Jeżeli w szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *począwszy od pewnego miejsca* n_0 *(tzn. dla każdego* $n \geq n_0$*) zachodzi*
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq p < 1,$$
to szereg ten jest zbieżny.

2. *Jeżeli w szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *począwszy od pewnego miejsca* n_0 *(tzn. dla każdego* $n \geq n_0$*) zachodzi*
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1,$$
to szereg ten jest rozbieżny.

Dowód. Wynika to bezpośrednio z kryterium porównawczego, gdzie szeregiem, do którego porównujemy, jest szereg geometryczny.

Twierdzenie 85

1. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r < 1$*, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny.*

2. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = s > 1$*, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Dowód. Jest to wniosek z twierdzenia d'Alemberta.

Uwaga 86 *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$*, to nie można na podstawie tego kryterium rozstrzygnąć, czy szereg jest zbieżny czy nie.*

Przykład 87

1. *Szereg*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots$$
jest zbieżny, ponieważ
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2^n}} = \frac{n \cdot n \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1} \cdot (n-1)} = \frac{n^2}{n^2-1} \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} < 1.$$

2. *Na podstawie kryterium ilorazowego nie można zdecydować o zbieżności szeregu harmonicznego, ponieważ*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Twierdzenie 88 ***(Kryterium pierwiastkowe Cauchyego)***

1. *Jeżeli w szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ począwszy od pewnego miejsca n_0 (tzn. dla każdego $n \geq n_0$) zachodzi*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq p < 1,$$

   to szereg ten jest zbieżny.

2. *Jeżeli w szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ począwszy od pewnego miejsca n_0 (tzn. dla każdego $n \geq n_0$) zachodzi*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1,$$

   to szereg ten jest rozbieżny.

Dowód. Wynika to bezpośrednio z kryterium porównawczego, gdzie szeregiem, do którego porównujemy, jest szereg geometryczny.

Twierdzenie 89 1. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r < 1$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny.*

2. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = s > 1$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Dowód. Jest to wniosek z twierdzenia Cauchyego.

Uwaga 90 *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, *to nie można na podstawie tego kryterium rozstrzygnąć, czy szereg jest zbieżny czy nie.*

Uwaga 91 *Kryterium Cauchyego jest mocniejsze niż kryterium d'Alemberta, tzn. istnieją szeregi, o których zbieżności nie można zdecydować stosując kryterium d'Alemberta, natomiast kryterium Cauchyego jest rozstrzygające, np.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2+(-1)^n]}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots .$$

Kryterium d'Alemberta nie prowadzi do rozstrzygnięcia, ponieważ stosunek dwu kolejnych wyrazów ogólnych jest na przemian mniejszy i większy od jedynki. Natomiast

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{[2+(-1)^n]}{2^n}} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2} = \frac{1}{2},$$

a zatem stosując kryterium Cauchyego możemy stwierdzić, że szereg jest zbieżny.

Przykład 92 *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ *jest zbieżny, ponieważ*

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2},$$

gdyż $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. *Ten sam wynik otrzymamy, stosując kryterium d'Alemberta:*

$$\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} < 1.$$

Uwaga 93 *Kryterium d'Alemberta stosujemy przeważnie wtedy, gdy występują silnie. Kryterium Cauchyego – gdy w wyrazie ogólnym szeregu n jest wykładnikiem potęgi.*

Przykład 94 1. *Zbadamy zbieżność szeregu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

za pomocą kryterium d'Alemberta. Mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)! \cdot n^n}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} < 1$$

2. *Kryterium Cauchyego nie da się do tego ciągu zastosować, ponieważ nie ma sposobu na łatwe przedstawienie wyrażenia $\sqrt[n]{n!}$ bądź obliczenie jego granicy.*

Przykład 95 *Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n} = \cos 1 + \cos\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{3} + \cos\frac{1}{4} + \dots$$

nie jest zbieżny, ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = \cos\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = \cos 0 = 1.$$

Uwaga 96 *Jeśli szereg jest zbieżny na podstawie kryterium Cauchyego bądź d'Alemberta, warunek konieczny zbieżności jest automatycznie spełniony i nie trzeba go sprawdzać.*

Twierdzenie 97 ***(Kryterium Leibnitza zbieżności szeregów)*** *Jeżeli w szeregu przemiennym $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ począwszy od pewnego miejsca n_0 bezwzględne wartości wyrazów szeregu dążą monotonicznie do zera (tzn $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$), to szereg ten jest zbieżny.*

Przykład 98 *Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

nazywamy szeregiem anharmonicznym. *Jest to szereg przemienny, zachodzi ponadto*

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \dots$$

oraz $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, a zatem szereg jest zbieżny.

Twierdzenie 99 ***(Twierdzenie o zbieżności bezwzględnej)*** *Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.*

Przykład 100 1. *Szereg anharmoniczny jest warunkowo zbieżny.*

2. *Szereg*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{11}} - \frac{1}{2^{12}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)_{mod\ 3}}}{2^n}$$

jest bezwzględnie zbieżny.

Granica i ciągłość funkcji

Definicja 101 ***(Definicja Cauchyego granic funkcji)***

1. *Liczbę y_0 nazywamy* lewostonną granicą funkcji f w punkcie x_0 *jeżeli dla każdego (dowolnie małego) $\epsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że*

$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \implies f(x) \in (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon).$$

   Piszemy wówczas

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = y_0 \quad \textit{lub} \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = y_0.$$

2. *Liczbę y_0 nazywamy* prawostronną granicą funkcji f w punkcie x_0 *jeżeli dla każdego (dowolnie małego) $\epsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że*

$$x \in (x_0, x_0 + \delta) \implies f(x) \in (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon).$$

   Piszemy wówczas

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = y_0 \quad \textit{lub} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = y_0.$$

3. *Funkcja f ma* granicę (obustronną) y_0 *w punkcie x_0, jeżeli istnieją w tym punkcie granice lewostronna i prawostronna i obie są równe y_0. Piszemy wówczas*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0.$$

4. *Granice lewostronna i prawostronna noszą nazwę* granic jednostronnych.

Uwaga 102 *Aby istniała granica funkcji w punkcie, funkcja ta wcale nie musi mieć w tym punkcie wartości (punkt ten nie musi należeć do dziedziny funkcji).*

Uwaga 103 *Liczba y_0 jest granicą funkcji f w punkcie x_0, jeżeli dla każdego (dowolnie małego) $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, takie że dla każdego x ze zbioru $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ zachodzi $f(x) \in (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$. Zauważ, że funkcja nie musi być zdefiniowana w punkcie x_0.*

Uwaga 104 *Zbiór $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ nazywamy* sąsiedztwem punktu x_0 *o promieniu δ, zbiór $(x_0 - \delta, x_0)$ —* lewostronnym sąsiedztwem punktu x_0 *o promieniu δ, zbiór $(x_0, x_0 + \delta)$ —* prawostronnym sąsiedztwem punktu x_0 *o promieniu δ, natomiast zbiór $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nazywa się* otoczeniem punktu x_0 *o promieniu δ. Definicje granic można przedstawić używając tych określeń, np.*
Liczbę y_0 nazywamy lewostronną granicą funkcji f w punkcie x_0, jeżeli dla dowolnego otoczenia $O(y_0)$ punktu y_0 istenieje lewostronne sąsiedztwo $S(x_0)$ punktu x_0, takie że

$$x \in S(x_0) \implies f(x) \in O(y_0).$$

Przykład 105 *Weźmy pod uwagę funkcję*

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$

W punkcie $x = 0$ funkcja ta nie ma granicy (prawostronnej). Dla dowolnego $\delta > 0$ w przedziale $(0, \delta)$ zawarte są punkty $\frac{2}{(2k+1)\pi}$ oraz $\frac{2}{(2k-1)\pi}$ (dla odpowiednio dużego k), dla których wartość funkcji wynosi odpowiednio -1 i 1. Jeśli zatem wybierzemy $\epsilon = \frac{1}{2}$, nie istnieje odpowiednie y_0, tak aby wszystkie wartości funkcji zawarte były w przedziale $(y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$. Zauważmy, że funkcja $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ jest ograniczona.

Definicja 106 ***(Definicja Cauchyego granic niewłaściwych)***

1. *Mówimy, że $+\infty$ jest granicą lewostronną funkcji f w punkcie x_0, jeżeli dla każdej liczby $M > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że*

   $$f(x) > M \quad dla \quad x \in (x_0 - \delta, x_0).$$

   Zapisujemy to jako

   $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty.$$

2. *Mówimy, że $-\infty$ jest granicą lewostronną funkcji f w punkcie x_0, jeżeli dla każdej liczby $M > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że*

   $$f(x) < -M \quad dla \quad x \in (x_0 - \delta, x_0).$$

   Zapisujemy to jako

   $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty.$$

3. *Mówimy, że $+\infty$ jest granicą prawostronną funkcji f w punkcie x_0, jeżeli dla kżdej liczby $M > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że*

   $$f(x) > M \quad dla \quad x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

   Zapisujemy to jako

   $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty.$$

4. *Mówimy, że $-\infty$ jest granicą prawostronną funkcji f w punkcie x_0, jeżeli dla kżdej liczby $M > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że*

   $$f(x) < -M \quad dla \quad x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

   Zapisujemy to jako

   $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty.$$

Definicja 107 ***(Definicja Cauchyego)***

1. *Mówimy, że funkcja f dąży do y_0 przy $x \to +\infty$ ($x \to +\infty$), jeżeli dla dowolnego (dowolnie małego) $\epsilon > 0$ istnieje takie $K > 0$, że*

   $$|f(x) - y_0| < \epsilon \quad dla\ każdego \quad x > K \quad (x < -K).$$

   Zapisujemy to jako

   $$\lim_{x \to +\infty} = y_0 \qquad lub \qquad \lim_{x \to -\infty} = y_0.$$

2. *Mówimy, że funkcja f dąży do $+\infty$ przy $x \to +\infty$, jeżeli dla dowolnego (dowolnie dużego) $M > 0$ istnieje takie $K > 0$, że*
$$f(x) > M \quad \textit{dla każdego} \quad x > K.$$
Zapisujemy to jako
$$\lim_{x \to +\infty} = +\infty.$$

3. *Mówimy, że funkcja f dąży do $-\infty$ przy $x \to +\infty$, jeżeli dla dowolnego (dowolnie dużego) $M > 0$ istnieje takie $K > 0$, że*
$$f(x) < -M \quad \textit{dla każdego} \quad x > K.$$
Zapisujemy to jako
$$\lim_{x \to +\infty} = -\infty.$$

4. *Mówimy, że funkcja f dąży do $+\infty$ przy $x \to -\infty$, jeżeli dla dowolnego (dowolnie dużego) $M > 0$ istnieje takie $K > 0$, że*
$$f(x) > M \quad \textit{dla każdego} \quad x < -K.$$
Zapisujemy to jako
$$\lim_{x \to -\infty} = +\infty.$$

5. *Mówimy, że funkcja f dąży do $-\infty$ przy $x \to -\infty$, jeżeli dla dowolnego (dowolnie dużego) $M > 0$ istnieje takie $K > 0$, że*
$$f(x) < -M \quad \textit{dla każdego} \quad x < -K.$$
Zapisujemy to jako
$$\lim_{x \to -\infty} = -\infty.$$

Definicja 108 ***(Definicja Heinego granic funkcji)*** *Liczba y_0 (lub $+\infty$, lub $-\infty$) jest* granicą lewostronną (prawostronną) *funkcji f w punkcie x_0 ($\pm\infty$), jeżeli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 ($\pm\infty$) i takiego, że $x_n < x_0$ ($x_n > x_0$) mamy $\lim_{n\to\infty} f(x) = y_0$ (lub $+\infty$, lub $-\infty$).*

Uwaga 109 *Obie definicje (Cauchyego i Heinego) są równoważne.*

Przykład 110 1. *Granicą prawostronną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x = 1$ jest 1. Dla dowolnego dodatniego $\epsilon < \frac{1}{3}$ weźmy $\delta = \frac{\epsilon}{3}$. Wówczas dla każdego $x \in (1, 1+\delta) = \left(1, 1+\frac{\epsilon}{3}\right)$ mamy*
$$f(x) = x^2 > 1^2 = 1 \quad \textit{oraz}$$
$$f(x) < \left(1+\frac{\epsilon}{3}\right)^2 = 1 + \frac{2\epsilon}{3} + \epsilon^2 \overset{(\epsilon<\frac{1}{3})}{<} 1 + \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = 1+\epsilon,$$
a zatem $f(x) \in (1, 1+\epsilon) \subseteq (1-\epsilon, 1+\epsilon)$.

Uwaga *Rozumowanie to wystarczy przeprowadzić dla małych ϵ. Dla $\epsilon \geq \frac{1}{3}$ możemy przyjąć $\delta = \frac{1}{10}$. Tę część rozwiązania się opuszcza.*

2. *Granicą lewostronną funkcji* $f(x) = x^2$ *w punkcie* $x = 1$ *jest* 1. *Dla dowolnego dodatniego* $\epsilon < \frac{1}{2}$ *weźmy* $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. *Wówczas dla każdego* $x \in (1-\delta, 1) = \left(1 - \frac{\epsilon}{2}, 1\right)$ *mamy*
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 > \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^2 = 1 - \epsilon + \epsilon^2 > 1 - \epsilon \quad \textit{oraz} \\ f(x) &< 1^2 = 1, \end{aligned}$$
a zatem $f(x) \in (1-\epsilon, 1) \subseteq (1-\epsilon, 1+\epsilon)$.

3. *Granicą funkcji* $f(x) = x^2$ *w punkcie* $x = 1$ *jest* 1.

4. *Granicą prawostronną funkcji* $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *w punkcie* $x = 0$ *jest* ∞. *Dla* $M > 0$ *szukamy takiego* δ, *żeby* $\frac{1}{x^2} > M$ *zachodziło dla* $0 < x < \delta$. *W tym celu po prostu rozwiązujemy tę nierówność:*
$$\frac{1}{x^2} > M \iff x^2 < \frac{1}{M} \iff x < \sqrt{\frac{1}{M}},$$
a zatem zachodzi ona dla $x \in (0, \delta)$, *gdzie* $\delta = \sqrt{\frac{1}{M}}$.

Uwaga 111 *Definicja pozwala nam* udowodnić, *że pewna liczba (lub* $\pm\infty$*) jest granicą funkcji. Do* obliczania *granic stosuje się inne metody.*

Twierdzenie 112 *Jeżeli istnieją granice* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *oraz* $\lim_{x\to x_0} g(x)$, *to*

1. $\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$,

2. $\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$,

3. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, *pod warunkiem, że* $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ *oraz* $g(x) \neq 0$ *w pewnym otoczeniu punktu* x_0,

4. $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = (\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim_{x\to x_0} f(x)}$.

Dotyczy to również granic jednostronnych oraz granic w plus minus nieskończoności.

Przykład 113 *1.*
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 2 + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 2 + 0 = 2$$

2.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 2x + 7}{-x^2 - 4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^2-2x+7}{x^2}}{\frac{-x^2-4}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x+7}{x^2}}{\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2-4}{x^2}} = \frac{3}{-1} = -3$$

3. Zwróćmy uwagę na to, że aby zastosować powyższe twierdzenie, musimy się upewnić, że obie granice istnieją (tzn. są skończone).
$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty, \qquad \textit{ale} \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Definicja 114 *Funkcję* f *nazywamy* ciągłą w punkcie x_0, *jeżeli*

1. *jest w tym punkcie zdefiniowana,*

2. *posiada obustronną granicę,*

3. *wartość funkcji i granica funkcji są sobie równe* $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Definicja 115 *Funkcję nazywamy* ciągłą w przedziale I, *jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału. Funkcję nazywamy* ciągłą, *jeżeli jest ciągła w całej swojej dziedzinie.*

Przykład 116 *Ciągłość najważniejszych funkcji:*

1. *Wielomiany są ciągłe w całej dziedzinie* ($x \in \mathbb{R}$).

2. *Funkcja potęgowa* $x \mapsto x^a$, *gdzie* a *to dowolna stała, jest określona i ciągła dla* $x \in \mathbb{R}_+$.

3. *Funkcja wykładnicza jest ciągła dla wszystkich wartości* $x \in \mathbb{R}$.

4. *Funkcja logarytmiczna jest ciągła w całej dziedzinie* ($x \in \mathbb{R}_+$).

5. *Funkcje trygonometryczne sinus i cosinus są ciągłe w całej dziedzinie* ($x \in \mathbb{R}$), *natomaist tangens, cotangens, secans i cosecans są przedziałami ciągłe w swoich dziedzinach (dziedzina każdej z tych funkcji jest nieskończoną sumą przedziałów; w każdym z nich funkcja jest ciągła).*

6. *Funkcje cyklometryczne są ciągłe w swoich dziedzinach.*

Twierdzenie 117 *Niech* f *i* g *będą funkcjami ciągłymi (w swoich dziedzinach). Wówczas*

1. *Suma* $f + g$ *jest ciągła w swojej dziedzinie.*

2. *Różnica* $f - g$ *jest ciągła w swojej dziedzinie.*

3. *Iloczyn* $f \cdot g$ *jest ciągły w swojej dziedzinie.*

4. *Iloraz* f/g *jest ciągły w swojej dziedzinie.*

Uwaga 118 *Iloraz dwóch funkcji nie jest określony w tych punktach dziedziny, gdzie mianownik ma wartość zero.*

Przykład 119 1. *Oblicz granicę funkcji*

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+2}$$

w punkcie $x = 2$.
Rozwiązanie *Jest to iloraz dwu funkcji ciągłych, a punkt* $x = 2$ *należy do dziedziny ilorazu* ($2^2 + 2 \neq 0$), *zatem*

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = \frac{2-1}{2^2+2} = \frac{1}{6}.$$

2. Wyznacz granicę funkcji

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x - 2}{5x^2 - 20}$$

w punkcie $x = 2$.
Rozwiązanie. *Funkcja w $x = 2$ nie jest określona. Zarówno licznik, jak i mianownik zerują się, a zatem oba mają dzielnik $x - 2$.*

$$\frac{3x^2 - 5x - 2}{5x^2 - 20} = \frac{3(x-2)(x+\frac{1}{3})}{5(x-2)(x+2)} = \frac{3(x+\frac{1}{3})}{5(x+2)} \quad \textit{dla } x \neq 2.$$

W sąsiedztwie punktu $x = 2$ funkcja w zachowuje się tak samo jak $f(x) = \frac{3(x+\frac{1}{3})}{5(x+2)}$, w szczególności ma tę samą granicę, którą możemy obliczyć tak samo, jak w poprzednim przykładzie (gdyż funkcja jest ciągła):

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{3(x+\frac{1}{3})}{5(x+2)} = \frac{3(2+\frac{1}{3})}{5(2+2)} = \frac{7}{20}.$$

3. Oblicz granice funkcji

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \frac{1}{x^3}$$

w punkcie $x = 0$.
Rozwiązanie. *Mamy tu wyrażenia postaci „$\frac{c}{0}$". Granicą w takim przypadku jest zawsze $\pm\infty$, wystarczy ustalić znak. Dla bezpieczeństwa lepiej rozpatrywać granice lewo– i prawostronne osobno.*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \textit{bo dzielimy liczbę dodatnią } 1 \textit{ przez liczbę dodatnią } x,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \textit{bo dzielimy liczbę dodatnią } 1 \textit{ przez liczbę ujemną } x,$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \textit{bo dzielimy liczbę dodatnią } 1 \textit{ przez liczbę dodatnią } x^2,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \textit{bo dzielimy liczbę dodatnią } 1 \textit{ przez liczbę dodatnią } x^2,$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty, \quad \textit{bo dzielimy liczbę dodatnią } 1 \textit{ przez liczbę dodatnią } x^3,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty, \quad \textit{bo dzielimy liczbę dodatnią } 1 \textit{ przez liczbę ujemną } x^3.$$

Uwaga *Tych uzasadnień w rozwiązaniu zadania się nie pisze, w przypadku „$\frac{c}{0}$" podaje się tylko wartość granicy.*

4. Oblicz granicę funkcji

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

w punkcie $x = 1$.
Rozwiązanie *Jest to znów granica postaci „$\frac{c}{0}$", trzeba zatem ustalić znak. Mamy dwie możliwości:*

(a) $\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1-x}$. *Pierwsza z funkcji jest w* $x=1$ *ciągła i dodatnia, druga zmienia znak z* $+$ *na* $-$. *Zatem*

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty.$$

(b) *Funkcja kwadratowa* f *zmienia w* $x=1$ *znak z* $+$ *na* $-$, *co prowadzi do tego samego wniosku.*

5. *Oblicz granice funkcji*

$$f(x)=x^4+2x^2-x-7$$

dla $x\to\pm\infty$.

Rozwiązanie

$$f(x)=x^4\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}-\frac{7}{x^4}\right).$$

Ponieważ wyrażenie w nawiasie dąży do 1 *przy* $x\to+\infty$, *istnieje takie* x_0, *że dla każdego* $x>x_0$ *zachodzi*

$$f(x)>\frac{1}{2}x^4.$$

Dla każdego $x>2$ *mamy* $\frac{1}{2}x^4=\frac{1}{2}x\cdot x^3>1\cdot x^3>x$, *zatem*

$$f(x)>x$$

dla $x>\max\{x_0,2\}$. *Można łatwo udowodnić z definicji, że*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

Zauważmy, że o wyniku tym zadecydował jednomian o najwyższym stopniu. Tak jest w przypadku wszystkich wielomianów: o wartości granicy w plus minus nieskończonowści decyduje włączynie zachowanie członu o najwyższym wykładniku.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty.$$

6. *Oblicz granice funkcji*

$$f(x)=-2x^3+3x-1$$

dla $x\to\pm\infty$.

Rozwiązanie

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} -2x^3=-\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} -2x^3=+\infty.$$

Współczynnik przy najwyżesze potędze zmiennej decyduje o znaku granicy w plus nieskończoności. Jeśli stopień wielomianu jest nieparzysty, granica w minus nieskończoności ma przeciwny znak.

7. *Oblicz granice funkcji*

$$f(x)=-2x^2-3x+2$$

dla $x\to\pm\infty$.

Rozwiązanie

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} -2x^2=-\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} -2x^2=-\infty.$$

Jeśli stopień wielomianu jest nieparzysty, granica w minus nieskończoności ma przeciwny znak niż granicy w plus nieskończoności.

8. *Oblicz granice funkcji*
$$f(x) = x^5 + 3x + 1$$
dla $x \to \pm\infty$.
Rozwiązanie
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^5 = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$$

9. *Oblicz granice funkcji*
$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 + 4x^2 - x + 7}$$
dla $x \to \pm\infty$.
Rozwiązanie
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 + 4x^2 - x + 7} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x + 4 - \frac{1}{x} + \frac{7}{x}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{x + 4 - \frac{1}{x} + \frac{7}{x}} = \left[\frac{1}{\pm\infty}\right] = 0$$
Jeżeli stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika, granica w plus minus nieskończoności wynosi 0.

10. *Oblicz granice funkcji*
$$f(x) = \frac{-2x^3 - 3x + 1}{3x^3 + 4x^2 - x + 7}$$
dla $x \to \pm\infty$.
Rozwiązanie
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^3 - 3x + 1}{3x^3 + 4x^2 - x + 7} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(-2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to\pm\infty}\left(-2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{\lim_{x\to\pm\infty}\left(3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$
Jeżeli stopień licznika jest równy stopniowi mianownika, granica w plus minus nieskończoności równa jest stosunkowi współczynników przy najwyższych potęgach zmiennej.

11. *Oblicz granice funkcji*
$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{5x^3 - 4x^2 - 2x + 3}$$
dla $x \to \pm\infty$.
Rozwiązanie
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{5x^3 - 4x^2 - 2x + 3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(x - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(5 - \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}}{5 - \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}} = \pm\infty$$
Jeżeli stopień licznika jest większy od stopnia mianownika, funkcja wymierna w plus minus nieskończoności zachowuje się tak, jak jednomian o współczynniku będącym ilorazem współczynników przy najwyższych potęgach i stopniowi równemu różnicy stopni wielomianów z licznika i z mianownika.

12. Oblicz

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1},\qquad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x-6},\qquad \lim_{x\to 25}\frac{\sqrt{5}-5}{x-25},\qquad \lim_{x\to 0^+} x+\frac{1}{x}.$$

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1} &= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}\\ &= \lim_{x\to -1}(x-1) = -1-1\\ &= -2,\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x-6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{2(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{x-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 25}\frac{\sqrt{x}-5}{x-25} &= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 25}\frac{\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} = \lim_{x\to 25}\frac{1}{\sqrt{x}+5}\\ &= \frac{1}{\sqrt{25}+5} = \frac{1}{10},\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x+\frac{1}{x} = [0+\infty] = +\infty.$$

Twierdzenie 120 *Zachodzi*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Przykład 121 *1. Oblicz* $\lim_{x\to 0}\frac{a\sin(bx)}{cx}$ *dla* $c\neq 0$. ***Rozwiązanie***

$$\frac{a\sin(bx)}{cx} = \frac{a\sin(bx)}{\frac{c}{b}\cdot bx} = \frac{ab}{c}\frac{\sin(bx)}{bx} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{ab}{c}\cdot 1 = \frac{ab}{c}$$

2. Oblicz $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\operatorname{tg} 2x}$.

Rozwiązanie

$$\frac{3x}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{\frac{3}{2}\cdot 2x\cdot\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{3\cos 2x}{2}\cdot\frac{2x}{\sin 2x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{3}{2}$$

Twierdzenie 122 *Jeżeli f jest funkcją ciągłą, a granica $\lim_{x\to x_0} g(x)$ istnieje, to*

$$\lim_{x\to x_0} f\circ g(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right).$$

Dotyczy to również granic jednostronnych oraz w nieskończoności.

Przykład 123 *1.* $\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$,

2. $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$,

3. $\lim_{x\to +\infty} e^{1/x} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1$,

4. $\lim_{x\to -\infty} e^{1/x} = e^{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1$,

5. $\lim_{x\to +\infty}\cos\frac{1}{x} = \cos\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \cos 0 = 1$.

Twierdzenie 124 *(*Własność Darboux*) Niech*

$$f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$$

będzie funkcją ciągłą. Wówczas dla dowolnego y znajdującego się pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$ (czyli $f(a)\le y\le f(b)$ lub $f(a)\ge y\ge f(b)$) istnieje takie $c\in(a,b)$, że $f(c)=y$.

Zastosowania rachunku granic. Asymptoty wykresu funkcji

Definicja 125 1. *Prostą o równaniu* $x = x_0$ *nazywamy* asymptotą pionową lewostronną *wykresu funkcji* f *wtedy, gdy*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \quad \textit{lub} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty.$$

2. *Prostą o równaniu* $x = x_0$ *nazywamy* asymptotą pionową prawostronną *wykresu funkcji* f *wtedy, gdy*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \quad \textit{lub} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty.$$

3. *Prostą o równaniu* $x = x_0$ *nazywamy* asymptotą pionową obustronną *wykresu funkcji* f *wtedy, gdy jest ona jednocześnie asymptotą lewo– i prawostronną wykresu tej funkcji.*

Uwaga 126 *Aby definicja miała sens, funkcja musi być zdefiniowana w odpowiednim otoczeniu punktu* x_0*. Podobnie będzie przy dalszych definicjach.*

Uwaga 127 *Aby funkcja miała w punkcie* x_0 *asymptotę pionową, musi być w tym punkcie nieciągła. Sama nieciagłość nie wystarcza do tego, by funkcja miała asymptotę pionową.*

Przykład 128 1. *Krzywa* $y = \frac{1}{x-1}$ *ma asymptotę pionową w* $x = 1$.

2. *Krzywa* $y = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$ *nie ma asymptot pionowych.*

3. *Wykres funkcji tangens ma nieskończenie wiele asymptot* $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. *Krzywa* $y = \ln x$ *ma asymptotę pionową prawostronną* $x = 0$.

Definicja 129 *Jeżeli funkcja* f *dąży do granicy skończonej* a*, gdy* $x \to -\infty$ *lub* $x \to +\infty$*, to mówimy, że prosta o równaniu* $y = a$ *jest* asymptotą poziomą *wykresu tej funkcji (przy* $x \to -\infty$ *lub* $x \to +\infty$*).*

Przykład 130 1. *Krzywa* $y = \frac{1}{x}$ *ma asymptotę poziomą* $y = 0$.

2. *Wykres funkcji arcus tangens ma dwie asymptoty poziome:* $y = -\frac{\pi}{2}$ *oraz* $y = \frac{\pi}{2}$.

3. *Krzywa* $y = \frac{x-1}{x-2}$ *ma asymptotę pionową* $x = 2$ *oraz asymptotę poziomą* $y = 1$.

4. *Krzywa* $y = \frac{\sin x}{x}$ *ma asymptotę poziomą* $x = 0$.

Definicja 131 1. *Prostą o równaniu* $y = ax+b$ *nazywamy* asymptotą ukośną lewostronną *wykresu funkcji* f*, jeżeli*

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

2. *Prostą o równaniu* $y = ax + b$ *nazywamy* asymptotą ukośną prawostronną *wykresu funkcji* f*, jeżeli*

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

3. *Prostą o równaniu $y = ax + b$ nazywamy* asymptotą ukośną obustronną *wykresu funkcji f, jeżeli jest jednocześnie asymptotą ukośną lewo– i prawostronną wykresu tej funkcji.*

Uwaga 132 *Jeżeli w równaniu asymptoty ukośnej mamy $a = 0$, otrzymujemy prostą $y = b$, czyli asymptotę poziomą. Zatem asymptota pozioma jest szczególnym przypadkiem asymptorty ukośnej.*

Przykład 133 1. *Aby wyznaczyć asymptotę ukośną wykresu funkcji wymiernej f, należy podzielić licznik przez mianownik. Jeżeli otrzymamy jako część całkowitą funkcję* liniową, *to wykres tej funkcji jest obustronną asymptotą wykresu funkcji f. Np. z rozkładu*

$$f(x) = \underbrace{\frac{x^3 - 2x^2 + 3}{2x^2}}_{\substack{\text{rzędna punktu}\\ \text{na krzywej}}} = \underbrace{\frac{1}{2}x - 1}_{\substack{\text{rzędna punktu}\\ \text{na asymptocie}}} + \underbrace{\frac{3}{2x^2}}_{\substack{\text{reszta dążąca do } 0\\ \text{przy } x \to \pm\infty}}$$

wynika, że asymptotą jest prosta $y = \frac{x}{2} - 1$.

2. *Parabola $y = x^2$ nie ma asyptoty ukośnej, bo dla dowolnej prostej $y = ax + b$ różnica rzędnych paraboli i prostej*

$$x^2 - (ax + b)$$

zawsze dąży do nieskończoności przy $x \to \pm\infty$.

3. *Krzywa $y = \frac{\sin x}{x} + x$ ma asymptotę ukośną $y = x$.*

Twierdzenie 134 1. *Jeżeli istnieją granice właściwe*

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - ax],$$

to prosta o równaniu $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną lewostronną funkcji f.

2. *Jeżeli istnieją granice właściwe*

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax],$$

to prosta o równaniu $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną funkcji f.

Uwaga 135 *Prawdziwe są również twierdzenia odwrotne.*

Przykład 136 1. *Dla funkcji $f(x) = \frac{x^3-2x^2+3}{2x^2}$ mamy*

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{2x^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^3} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$
$$\frac{x^3 - 2x^2 + 3}{2x^2} - \frac{1}{2}x = -1 + \frac{3}{2x^2} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} -1,$$

a zatem prosta $y = \frac{x}{2} - 1$ jest obustronną asymptotą ukośną wykresu tej funkcji. Podobnie będzie dla wszystkich funkcji wymiernych, których częścią całkowitą z dzielenia licznika przez mianownik jest funkcja liniowa, tzn takich, w których stopień licznika jest równy bądź o jeden wyższy od stopnia mianownika. Jeśli stopień licznika i mianownika są równe, asymptota w rzeczywistości jest asymptotą pionową.

2. Dla funkcji $f(x) = \frac{x^4+3x^3-2}{x^2+2}$ *mamy*

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^4+3x^3-2}{x^3+2x} = x + 3 - \frac{2x^2+6x+2}{x^3+2x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty,$$

a zatem wykres tej funkcji nie posiada asymptot ukośnych. Podobnie będzie dla wszystkich funkcji wymiernych, w których stopień licznika jest o co najmmniej dwa wyższy od stopnia mianownika.

3. Dla funkcji $f(x) = \frac{2x-1}{2x^2+2}$ *mamy*

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x-1}{2x^3+2x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0,$$
$$\frac{2x-1}{2x^2+2} - 0 \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0,$$

a zatem prosta $y = 0$ *jest obustronną asymptotą ukośną wykresu tej funkcji. Podobnie będzie dla wszystkich funkcji wymiernych, w których stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika.*

Obliczając granice, warto skorzystać z granic specjalnych:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = a$,
2. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$,
3. $\lim_{x\to\pm\infty} = \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$,
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$,
5. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ dla $a > 0$,
6. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = a$,
7. $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ dla $a > 0$, $a \neq 1$.

Przykład 137 *1.* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$,

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \cdot \frac{\cos 3x}{\cos 2x} \cdot \frac{3x}{2x} \cdot \frac{2}{3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{\cos 3x}{\cos 2x} \cdot \frac{2}{3} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$,

3. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-3}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{-3}{x}\right)^x = e^{-3}$.

Pochodna funkcji

Definicja 138 *Niech dana będzie funkcja $f: A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subseteq \mathbb{R}$. Jeśli istnieje granica skończona*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

to nazywamy ją pochodną funkcji f w punkcie x_0 *i oznaczamy $f'(x_0)$. Dla każdego h iloraz*

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

nazywamy ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0.

Uwaga 139 *Należy wziąć pod uwagę również ujemne przyrosty h!*

Przykład 140 *1. Niech $f(x) = 2$ i $x_0 = 1$. Wówczas*

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{2-2}{h} = \frac{0}{h} = 0 \longrightarrow 0 \quad \text{dla } h \to 0.$$

2. Niech $f(x) = 2x$ i $x_0 = -2$. Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{2(-2+h) - 2(-2)}{h} \\ &= \frac{2(-2+h+2)}{h} = \frac{2h}{h} = 2 \longrightarrow 2 \quad \text{dla } h \to 0. \end{aligned}$$

3. Niech $f(x) = a^x$ i $x_0 = 1$. Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{a^{1+h} - a^1}{h} = \frac{a \cdot a^h - a}{h} \\ &= a \cdot \frac{a^h - 1}{h} \longrightarrow a \cdot \ln a \quad \text{dla } h \to 0. \end{aligned}$$

Definicja 141 *Funkcję nazywamy* różniczkowalną w punkcie x_0, *jeśli ma w tym punkcie pochodną. Funkcję nazywamy* różniczkowalną w przedziale I, *jeśli jest różniczkowalna w każdym punkcie tego przedziału. Funkcję nazywamy* różniczkowalną, *jeśli jest różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny.*

Twierdzenie 142 *Jeśli funkcja jest różniczkowalna w punkcie, jest w tym punkcie ciągła.*

Uwaga 143 *Sama ciągłość nie wystarcza do tego, aby funkcja była różniczkowalna.*

Przykład 144 *Weźmy funkcję $f(x) = |x|$ dla $x_0 = 0$.*

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-0}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \frac{h}{h} = 1, & \text{dla } h > 0, \\ \frac{-h}{h} = -1, & \text{dla } h < 0, \end{cases}$$

czyli nie istnieje obustronna granica.

Definicja 145 *Niech f będzie funkcją różniczkowalną. Funkcję*

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

nazywamy pochodną *funkcji f.*

Uwaga 146 *Pochodna funkcji w punkcie jest* liczbą*, natomiast pochodna funkcji jest również* funkcją*. Każdemu punktowi swojej dziedziny przyporządkowuje wartość pochodnej funkcji wyjściowej w tym punkcie.*

Uwaga 147 *Dla oznaczenia pochodnej używa się również zapisu $\frac{df}{dx}$.*

Uwaga 148 *Stosunkowo trudno jest obliczać wartość pochodnej funkcji w punkcie, natomiast łatwo jest znaleźć pochodną jako funkcję. Zatem aby obliczyć wartość pochodnej funkcji w punkcie, znajdujemy najpierw pochodną jako funkcję, a następnie podstawiamy wartość argumentu.*

Pochodne niektórych funkcji:

$$\begin{aligned}
(c)' &= 0, \\
(x)' &= 1, \\
(x^a)' &= a \cdot x^{a-1}, \\
(e^x)' &= e^x, \\
(a^x)' &= a^x \ln a, \qquad a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}, \\
(\ln|x|)' &= \frac{1}{x}, \qquad x \in \mathbb{R}_+, \\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a}, \qquad a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}, \\
(\sin x)' &= \cos x, \\
(\cos x)' &= -\sin x, \\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\
(\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x), \qquad x \neq \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1,1), \\
(\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1,1), \\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \\
(\operatorname{arcctg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Twierdzenie 149 *Niech f i g będą funkcjami różniczkowalnymi. Wówczas*

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ *(tzn. różniczkowanie jest* addytywne*)*,
2. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$,
3. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,
4. *dla x takich, że $g(x) \neq 0$:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Przykład 150 1. *Niech c będzie stałą rzeczywistą, a f funkcją różniczkowalną. Wówczas*

$$[(cf)(x)]' = c' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = 0 \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x).$$

Można to potraktować jako kolejną regułę różniczkowania, tzw. jednorodność.

2. *Niech $f(x) \neq 0$. Wtedy*

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{1' \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}.$$

Można to potraktować jako kolejną regułę różniczkowania.

3. *Różniczkowanie wielomianów:*

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)' = \sum_{k=0}^{n} (a_k x^k)' = \sum_{k=0}^{n} a_k (x^k)' = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k.$$

4.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\ln x \cdot e^x}{2x^2}\right)' &= \frac{(\ln x \cdot e^x)' \cdot 2x^2 - (\ln x \cdot e^x) \cdot (2x^2)'}{[2x^2]^2} \\ &= \frac{[(\ln x)' \cdot e^x + \ln x \cdot (e^x)'] \cdot 2x^2 - (\ln x \cdot e^x) \cdot (2 \cdot 2x)}{4x^4} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{x} \cdot e^x + \ln x \cdot e^x\right) \cdot 2x^2 - 4x \ln x \cdot e^x}{4x^4} \\ &= e^x \cdot \frac{2x + 2x \cdot x \ln x - 4x \ln x}{4x^4} = e^x \cdot \frac{1 + x \ln x - 2 \ln x}{2x^3}, \\ & x \in \mathbb{R}_+\end{aligned}$$

5. *Pochodna funkcji tangens:*

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Definicja 151 *Operację, która jest addytywna i jednorodna nazywamy* liniową.

Twierdzenie 152 ***(Pochodna funkcji złożonej)*** *Jeżeli funkcja złożona $f \circ g$ jest określona w pewnym otoczeniu punktu x_0, funkcja g jest różniczkowalna w punkcie x_0, a funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $g_0 = g(x_0)$, to pochodna funkcji złożonej $f \circ g$ w punkcie x_0 dana jest wzorem*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'\left(g(x_0)\right) \cdot g'(x_0) = f'(g_0) \cdot g'(x_0).$$

Uwaga 153 *Można to zapisać jako*

$$\frac{d(f \circ g)}{dx}(x_0) = \frac{df}{dg}(g_0) \cdot \frac{dg}{dx}(x_0).$$

Przykład 154

$$\left(e^{1/x}\right)' = e^{1/x} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-e^{1/x}}{x^2}, \qquad x \neq 0$$

Twierdzenie 155 ***(Pochodna funkcji odwrotnej)*** *Jeżeli funkcja różniczkowalna f ma funkcję odwrotną f^{-1}, to pochodna funkcji odwrotnej równa się odwrtoności pochodnej:*

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Uwaga 156 *Można to zapisać (skrótowo) jako*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Przykład 157 *1. Pochodna logarytmu:*

$$(\ln x)' = \left.\frac{1}{(e^y)'}\right|_{y=\ln x} = \left.\frac{1}{e^y}\right|_{y=\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

2. Pochodna funkcji arcus cosinus:

$$(\arccos x)' = \left.\frac{1}{(\cos y)'}\right|_{y=\arccos x} = \left.\frac{1}{-\sin y}\right|_{y=\arccos x}$$
$$\stackrel{(*)}{=} \left.\frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}\right|_{y=\arccos x} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$(*)$ – w przedziale określoności funkcji arcus cosinus, czyli $(0, \pi)$, sinus jest dodatni

Definicja 158 *Jeżeli pochodna danej funkcji f ma w pewnym punkcie x_0 pochodną, to nazywamy ją* drugą pochodną funkcji f w punkcie x_0 *i oznaczamy symbolem $f''(x_0)$. Przypisując każdemu punktowi x, w którym f ma drugą pochodną, wartość tejże, mamy funkcję:*

$$x \mapsto f''(x),$$

nazywaną również drugą pochodną *funkcji f. Oznaczamy ją również przez $\frac{d^2 f}{dx^2}$.*

Uwaga 159 *Podobnie określamy trzecią i dalsze pochodne.*

Przykład 160 *1.*

$$\begin{aligned} f(x) &= -4x^3 + 2x, \\ f'(x) &= -12x^2 + 2, \\ f''(x) &= -24x, \\ f'''(x) &= -24, \\ f^{(4)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos \ln x, \qquad x \in \mathbb{R}_+, \\ f'(x) &= -\sin \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{-\sin \ln x}{x}, \\ f''(x) &= \frac{\left(-\cos \ln x \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot x - (-\sin \ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{\sin \ln x - \cos \ln x}{x^2} \\ &= -\frac{f(x)}{x^2} - \frac{f'(x)}{x}, \\ f'''(x) &= -\frac{f'(x) \cdot x^2 - f(x) \cdot 2x}{x^4} - \frac{f''(x) \cdot x - f'(x) \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{-xf'(x) + 2f(x)}{x^3} + \frac{-x^2 f''(x) + xf'(x)}{x^3} = \frac{2f(x) - x^2 f''(x)}{x^3} \\ &= \frac{2f(x) - (-f(x) - xf'(x))}{x^3} = \frac{3f(x) + xf'(x)}{x^3} \\ &= \frac{3 \cos \ln x - \sin \ln x}{x^3} \end{aligned}$$

Różniczka funkcji

Definicja 161 *Niech funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0. Różniczką funkcji f w punkcie x_0 nazywamy funkcję df zmiennej $\Delta x = x - x_0$ określoną wzorem*

$$df(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x.$$

Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, to

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

przy czym błąd, jaki popełnia się zastępując przyrost funkcji

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

jej różniczką $df = f'(x_0)\Delta x$, dąży do zera szybciej niż Δx, tj.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x} = 0.$$

Przykład 162 *Korzystając z różniczki funkcji oblicz przybliżone wartości podanych wyrażeń:*

1. $\sqrt[4]{15,96}$,

2. $\operatorname{arctg} 1,05$,

3. $\cos 0.03$,

4. $e^{-0,001}$,

5. $\ln 1,004$,

6. $\frac{1}{0,9996}$

i porównaj otrzymane wyniki z wartościami uzyskanymi za pomocą kalkulatora.

Szereg Taylora

Twierdzenie 163 ***(Taylora)*** *Jeżeli funkcja f ma w otoczeniu pewnego punktu $x_0 = a$, tzn. w pewnym przedziale $(a-r, a+r)$ ciągłe pochodne do rzędu n, to można ją przedstawić* wzorem Taylora

$$\underset{\textit{wartość funkcji}}{f(x)} = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}}_{\textit{suma częściowa}} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n}_{\textit{reszta}},$$

gdzie $c = c(x) \in (x, a)$ lub $c = c(x) \in (a, x)$.

Jeśli istnieją pochodne dowolnie dużych rzędów i dla każdego x z przedziału $(a-r, a+r)$ reszta dąży do zera przy $n \to \infty$, to mówimy, że funkcja daje się w tym przedziale rozwinąć w *szereg Taylora* i piszemy

$$\underset{\text{wartość funkcji}}{f(x)} = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots}_{\text{szereg Taylora}}$$

dla $|x-a| < r$. Prawa strona jest *sumą szeregu nieskończonego*. Piszemy również

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad \text{dla } |x-a| < r,$$

przy czym $f^{(0)}$ oznacza funkcję zróżniczkowaną 0 razy, czyli po prostu funkcję f.

Jeżeli w szeregu Taylora weźmiemy $a = 0$, otrzymamy *szereg Maclaurina*

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n + \dots .$$

Uwaga 164 *Warunek zbieżności reszt do zera jest spełniony w szczególności wtedy, gdy wszystkie pochodne są wspólnie ograniczone w przedziale $(a-r, a+r)$, tzn.*

$$|f^{(n)}(x)| < M$$

dla dowolnego n i $x \in (a-r, a+r)$.

Przykład 165 *Rozwińmy w szereg Maclaurina funkcję sinus:*

$$\begin{array}{ll}
\sin'(x) = \cos x, & \sin^{(4k+1)}(x) = \cos x, \\
\sin''(x) = -\sin x, & \sin^{(4k+2)}(x) = -\sin x, \\
\sin'''(x) = -\cos x, & \sin^{(4k+3)}(x) = -\cos x, \\
\sin^{(4)}(x) = \sin x, & \sin^{(4k)}(x) = \sin x.
\end{array}$$

Wszystkie te pochodne są jednostajnie (tzn. przez tę samą liczbę) ograniczone dla $x \in \mathbb{R}$*. Ponadto* $f^{(2k)}(0) = \pm\sin 0 = 0$ *oraz* $f^{(2k+1)}(x) = \pm\cos 0 = \pm 1$*. Stąd*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} + \ldots$$

dla $x \in \mathbb{R}$*.*

Przykład 166 *1. Rozwińmy w szereg Taylora funkcję* $f(x) = 10x^5 + 7x^4 - 12x^3 + x^2 - 3x + 5$ *w otoczeniu punktu* $x = 1$*. Policzmy pochodne*

$$\begin{array}{ll}
f'(x) = 50x^4 + 28x^3 - 36x^2 + 2x - 3, & f'(1) = 41, \\
f''(x) = 200x^3 + 84x^2 - 72x + 2, & f''(1) = 214, \\
f'''(x) = 600x^2 + 168x - 72, & f'''(1) = 696, \\
f^{(4)}(x) = 1200x + 168, & f^{(4)}(1) = 1368, \\
f^{(5)}(x) = 1200, & f^{(5)}(1) = 1200,
\end{array}$$

a wszystkie dalsze pochodne są równe zeru. Ponadto

$$f(1) = 10 + 7 - 12 + 1 - 3 + 5 = 8$$

i po podstawieniu do wzoru otrzymujemy

$$\begin{aligned}
f(x) &= 8 + \frac{41}{1!}(x-1) + \frac{214}{2!}(x-1)^2 + \frac{696}{3!}(x-1)^3 + \frac{1368}{4!}(x-1)^4 + \frac{1200}{5!}(x-1)^5 \\
&= 8 + 41(x-1) + 107(x-1)^2 + 116(x-1)^3 + 57(x-1)^4 + 10(x-1)^5.
\end{aligned}$$

2. Rozwińmy w szereg Taylora funkcję $f(x) = 10x^5 + 7x^4 - 12x^3 + x^2 - 3x + 5$ *w otoczeniu punktu* $x = 0$*. Wartości pochodnych w zerze wynoszą*

$$\begin{aligned}
f'(0) &= -3, \\
f''(0) &= 2, \\
f'''(0) &= -72, \\
f^{(4)}(0) &= 168, \\
f^{(5)}(0) &= 1200,
\end{aligned}$$

a każda następna zero, ponadto $f(0) = 5$*. Stąd*

$$\begin{aligned}
f(x) &= 5 + \frac{-3}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{-72}{3!}x^3 + \frac{168}{4!}x^4 + \frac{1200}{5!}x^5 \\
&= 5 - 3x + x^2 + 12x^3 + 7x^4 + 10x^5.
\end{aligned}$$

Jest to rozwinieęcie tej samej postaci, co funkcja wyjściowa.

Zastosowania pochodnych

Geometria: styczna

Niech krzywa będzie dana jako wykres funkcji, $y = f(x)$. Aby znaleźć równanie stycznej do tej krzywej w punkcie $p = (x_0, f(x_0))$, weźmy pod uwagę punkt położony na krzywej w bliskiej odległości $q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$. Nachył siecznej przechodzącej przez te dwa punkty równy jest ilorazowi różnicowemu

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Gdy punkt q zbliża się do punktu p, co odpowiada zmniejszaniu się odstępu h, wartość ilorazu różnicowego zbliża się do wartości pochodnej $f'(x_0)$, która jest nachyłem stycznej w punkcie p. Jeśli $f'(x_0)$ jest znane, równanie stycznej jest dane jako:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Przykład 167 *Aby wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie o odciętej $x_0 = 1$ wykonujemy następujące kroki:*

1. *Znajdujemy drugą współrzędną punktu styczności: dla $x_0 = 1$ mamy $y_0 = 1^2 = 1$. Zatem $(x_0, y_0) = (1, 1)$.*

2. *Obliczamy pochodną funkcji: $f'(x) = 2x$.*

3. *Podstawiamy $x_0 = 1$ do pochodnej, aby znaleźć współczynnik kierunkowy stycznej: $f'(x_0) = 2 \cdot 1 = 2$.*

4. *Podstawiamy wartość x_0, $f(x_0)$ oraz $f'(x_0)$ do równania stycznej:*

   $$y - 1 = 2(x - 1)$$

   oraz upraszczamy:

   $$y = 2x - 1.$$

Uwaga 168 Funkcja *jest odwzorowaniem, maszyną, która zmienia liczby w inne liczby. Jej* wykres *jest obiektem geometrycznym. Podobnie* styczna *jest obiektem geometrycznym. W powyższym przykładzie $f(x) = x^2$ jest wzorem funkcji, $y = x^2$ jest równaniem jej wykresu, $y = 2x - 1$ jest równaniem styczenj, a $g(x) = 2x - 1$ byłoby równaniem funkcji, której wykres jest styczny z wykresem funkcji f.*

Interpretacja fizyczna

Pochodna odległości po czasie stanowi chwilową szybkość.

Czym jest szybkość chwilowa? Można to interpretować jako średnią szybkość w bardzo krótkim czasie. Załóżmy, że $f(t)$ oznacza pozycję w czasie t, którą rozumiemy jako pewną wartość (odelgłość od punktu 0) na linii (linią może być droga ze Szczecina d Gorzowa). W pewnym momencie t chcielibyśmy poznać chwilową szybkość $v(t)$. Niech zatem Δt będzie krt́kim odcinkiem czasu. Wówczas $f(t)$ jest pozycją w momencie t, a $f(t+\Delta t)$ jest pozycją w momencie $t+\Delta t$. Przejechaliśmy dystans $f(t+\Delta t)-f(t)$ w czasie Δt. Zatem naszą średnią szybkością w czasie Δt jest

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

Nie chcemy jednak znać średniej szybkości w bardzo krótkim odcinku czasu, a szybkość chwilową, w danym momencie. Bierzemy szybkość średnią dla przedziałów czasu kurczących się do zera:

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

W podobny sposób argumentujemy, że pochodna szybkości, czyli druga pochodna pozycji, jest przyspieszeniem.

Uwaga 169 *W fizyce rozróżniamy szybkość i prędkość. Ta pierwsza jest wielkością skalarną, czyli bez wyróżnionego kierunku. Prędkość natomiast jest wielkością wektorową i jest pochdną położenia (wektorowego) po czasie.*

Przykład 170 *(ukradziony od Joela Hassa) Ever since you started your calculus class you've suffered from blinding headaches. Nothing helps. Acupuncture, drugs, counseling, you've tried them all, but the headaches get worse and worse. The pain is unbearable, and you decide to end it all. Your drive to the middle of the Golden Gate Bridge and climb over the safety rail, 400 feet above the water. With that pain, life is not worth living, so you fling your calculus text (which you carry everywhere) over the edge, and jump out after it. Your height in feet over the water after t seconds is given by the function $h(t)=400-16t^2$.*

a. How long till you hit the water?

Solution to a): We don't need to do any fancy differentiation for this part. We just need to solve for when the height is zero. Setting $h(t)=0$ gives:

$$\begin{aligned} 0 &= 400-16t^2 \\ t^2 &= 400/16 = 25 \\ t &= 5 \end{aligned}$$

So you hit the water after 5 seconds.

Right after you let go of the textbook your headache disappears. You realize that it is that hated text that has been the cause of all your pain. Suddenly life is a realm of wonder, calling for your presence.

b. You had lots of diving lessons when you were a kid. If you are traveling with a velocity of less than 200 feet per second, you can survive the plunge. Will you survive?

Solution to b): We need to calculate your velocity when you hit the water. Differentiating h(t) to get the velocity gives

$$v(t)=h'(t)=-32t.$$

So the velocity when you hit the water, when $t = 5$, is given by $v(5) = -160$.

You hit the water at a speed of 160 feet per second, so you'll make it. The minus sign in the velocity indicates that the height is decreasing. Now, if you can just swim 2 miles in freezing water against a fierce current, you may still be able to make your 3 PM calculus class.

Badanie przebiegu zmienności funkcji

Monotoniczność funkcji

Twierdzenie 171 ***(Rolle)*** *Jeśli funkcja rzeczywista f jest ciągła na przedziale domknieętym $[a, b]$, różniczkowalna na przedziale otwartym (a, b) oraz $f(a) = f(b)$, wówczas istnieje liczba rzeczywista c w przedziale otwartym (a, b), taka że*

$$f'(c) = 0.$$

Twierdzenie 172 ***(Larange, twierdzenie o wartości średniej)*** *Jeśli funkcja rzeczywista f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna na przedziale otwartym (a, b), wówczas istnieje $c \in (a, b)$, takie że*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Jest to uogólnienie poprzedniego twierdzenia (podstaw $f(a) = f(b)$).
Wnioski:

1. Jeśli pochodna funkcji f jest *równa* 0 w każdym punkcie przedziału (a, b), to funkcja ta jest *stała* w tym przedziale.

2. Jeśli pochodna funkcji f jest *dodatnia* w każdym punkcie przedziału (a, b), to funkcja ta jest *monotonicznie rosnąca* w tym przedziale.

3. Jeśli pochodna funkcji f jest *ujemna* w każdym punkcie przedziału (a, b), to funkcja ta jest *monotonicznie malejąca* w tym przedziale.

Przykład 173 *Zbadajmy monotoniczność funkcji $f(x) = 4 + 3x^2 - x^3$. Jest to wielomian, zatem różniczkowalny.*

$$\begin{aligned}
&f'(x) = 6x - 3x^2, \\
&f'(x) > 0 \iff 6x - 3x^2 > 0 \iff 3x(2 - x) > 0 \iff x \in (0, 2), \\
&f'(x) < 0 \iff 6x - 3x^2 < 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty).
\end{aligned}$$

Stąd wynika, że funkcja jest rosnąca w przedziale $(0, 2)$ i malejąca w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $\cup(2, \infty)$.

Ekstrema lokalne funkcji

Definicja 174 *1. Funkcja rzeczywista f określona na liczbach rzeczywistych* ma maksimum lokalne w punkcie x_0*, jeśli istnieje $\epsilon > 0$ takie, że $f(x_0) \geq f(x)$ dla $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Wartość funkcji w tym punkcie nazywamy* maksimum *funkcji.*

2. *Funkcja rzeczywista f określona na liczbach rzeczywistych* ma ścisłe maksimum lokalne w punkcie x_0, *jeśli istnieje $\epsilon > 0$ takie, że $f(x_0) > f(x)$ dla $x \in (x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$. Wartość funkcji w tym punkcie nazywamy* ścisłym maksimum *funkcji.*

3. *Funkcja rzeczywista f określona na liczbach rzeczywistych* ma minimum lokalne w punkcie x_0, *jeśli istnieje $\epsilon > 0$ takie, że $f(x_0) \leq f(x)$ dla $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Wartość funkcji w tym punkcie nazywamy* minimum *funkcji.*

4. *Funkcja rzeczywista f określona na liczbach rzeczywistych* ma ścisłe minimum lokalne w punkcie x_0, *jeśli istnieje $\epsilon > 0$ takie, że $f(x_0) < f(x)$ dla $x \in (x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$. Wartość funkcji w tym punkcie nazywamy* ścisłym minimum *funkcji.*

5. (Ścisłe) ekstremum lokalne *to (ścisłe) minimum lub (ścisłe) maksimum.*

Uwaga 175 *Określenie ekstremum lokalnego dotyczy bardzo małego sąsiedztwa punktu x_0, ekstrema lokalne mogą być położone bardzo blisko siebie.*

Przykład 176 *Funkcja $f(x) = |x|$ ma minimum lokalne w $x = 0$.*

Twierdzenie 177 ***(Fermat)*** *Jeśli funkcja różniczkowalna ma ekstermum lokalne w x_0, to $f'(x_0) = 0$.*

Przykład 178

1. *Wartość bezwzględna nie jest różniczkowalna w $x_0 = 0$.*

2. *Funkcja $f(x) = x^2$ ma minimum lokalne w $x_0 = 0$. Jej pochodna $f'(x) = 2x$ znika w tym punkcie.*

3. *Funkcja $f(x) = x^3$ ma pochodną zerującą się w $x_0 = 0$ ($f'(x) = 3x^2$), ale nie ma ekstremum.*

Twierdzenie 179 *Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale (a, b), taką że $f'(x_0) = 0$ dla pewnego x_0. Warunkiem wystarczającym istnienia ekstremum w x_0 jest zmiana znaku pochodnej. Jeśli pochodna zmienia znak z $-$ na $+$, to funkcja ma minimum lokalne. Jeśli pochodna zmienia znak z $+$ na $-$, to funkcja ma maksimum lokalne.*

Uwaga 180 *Warunkiem istnienia ekstremum jest zmiana znaku pochodnej w sąsiedzwtie punktu. Dla x_0 pochodna może nie istnieć. Przykładem jest ekstremum wartości bezwzględniej w zerze. Nie przeciwstawia się to powyższemu twierdzeniu, w którym zakłada się różniczkowalność.*

Przykład 181 *Znajdziemy ekstrema lokalne funkcji $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 15$.*

$$\begin{aligned} &f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6) \\ &f'(x) = 0 \iff x^2 + x - 6 = 0 \iff x = -3 \text{ lub } x = 2. \end{aligned}$$

$f'(x) > 0$ dla $x < -3$, $f'(x) < 0$ dla $-3 < x < 2$, $f'(x) > 0$ dla $x > 2$. Stąd f ma maksimum w $x = -3$ i minimum w $x = 2$.

Przykład 182 *Pochodna wartości bezwzględnej wynosi -1 dla $x < 0$ i 1 dla $x > 0$. W punkcie $x = 0$ zmienia znak z $-$ na $+$ (mimo że pochodna w tym punkcie nie istnieje), a funkcja ma minimum.*

Jeśli funkcja f jest *dwukrotnie różniczkowalna* (tzn. jej pochodna ma pochodną), i jej pochodna f' zmienia znak z $-$ na $+$ w punkcie x_0, to ta pochodna jest funkcją rosnącą, a zatem f'' jest dodatnie. Podobnie w przeciwnym przypadku, jeśli pochodna f' zmienia znak z $+$ na $-$ w punkcie x_0, to ta pochodna jest funkcją malejącą i stąd f'' jest ujemne.

Twierdzenie 183 *Niech f będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w przedziale (a, b) i niech $f'(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \in (a, b)$. Wystarczającym warunkiem istnienia ekstremum w x_0 jest, aby druga pochodna f'' była różna od zera w x_0. Jeśli $f''(x_0) > 0$, to funkcja ma minimum lokalne. Jeśli $f''(x_0) < 0$, to funkcja ma maksimum lokalne.*

Przykład 184 *Weźmy pod uwagę funkcję $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 15$.*

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = 6(x^2 + x - 6) = 0 \iff x = -3 \text{ lub } x = 2,\\
&f''(x) = 6(2x + 1),\\
&f''(-3) < 0,\ f''(2) > 0.
\end{aligned}
$$

Stąd f ma minimum w $x = -3$ i maksimum w $x = 2$.

Definicja 185 *Funkcja ma* wartość największą *lub* maksimum globalne *w x_0, jeśli $f(x_0) \geq f(x)$ dla wszystkich x. Funkcja ma* wartość najmniejszą *lub* minimum globalne *w x_0, jeśli $f(x_0) \leq f(x)$ dla wszystkich x.*

Uwaga 186 *Zazwyczaj szukamy ekstremów globalnych w przedziałach domkniętych. Powodem jest, że funkcja* ciągła *na przedziale* domkniętym *zawsze ma wartość najmniejszą i największą. Może być to wartość funkcji na końcu przedziału lub w ekstremum lokalnym.*

Przykład 187 *Aby znaleźć najmniejszą i największą wartości funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ w przedziale $[-2, 1]$, najpierw obliczamy pochodną i jej miejsca zerowe.*

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)\\
&f'(x) = 0 \iff x = -1 \text{ lub } x = 3.
\end{aligned}
$$

Punkt $x = 3$ nas nie interesuje, ponieważ nie leży w przedziale. W punkcie $x = -1$ pochodna zmienia znak z $+$ na $-$, zatem funkcja ma lokalne maksimum równe $f(-1) = 12$. Wartości na końcach przedziału wynoszą:

$$
\begin{aligned}
f(-2) &= 5,\\
f(1) &= -4.
\end{aligned}
$$

Najmniejsza i największa wartości funkcji f w przedziale $[-2, 1]$ to największa i najmniejsza z liczb 12, 5, -4. Funkcja ma maksimum globalne równe 12 w punkcie $x = -1$ i minimum globalne równe -4 w punkcie $x = 1$.

Uwaga 188 *Skoro i tak trzeba obliczyć wartość funkcji w ekstremum, nie musimy rozważać, czy jest to minimum lokalne, czy maksimum lokalne. Nie musimy nawet sprawdzać, czy faktycznie jest to ekstremum (wystarczy punkt „podejrzany"): wartość funkcji w takim punkcie porównujemy później z wartościami na końcach przedziału.*

Uwaga 189 *Jeśli szukamy wyłącznie globalnych minimów albo wyłącznie globalnych maksimów, może być lepiej sprawdzić, czy znalezoine ekstremum lokalne jest minimum czy maksimum.*

Wypukłość funkcji, punkty przegięcia

Twierdzenie 190 *1. Warunkiem wystarczającym wypukłości w dół krzywej $y = f(x)$ w przedziale (a, b) jest, aby druga pochodna funkcji f była w tym przedziale nieujemna:*

$$f''(x) \geq 0 \quad dla \quad x \in (a, b).$$

2. Warunkiem wystarczającym wypukłości w górę krzywej $y = f(x)$ w przedziale (a, b) jest, aby druga pochodna funkcji f była w tym przedziale niedodatnia

$$f''(x) \leq 0 \quad dla \quad x \in (a, b).$$

Przykład 191 *1. Druga pochodna funkcji kwadratowej $x \mapsto ax^2 + bx + c$ jest równa podwojonemu współczynnikowi a. Jeśli jest on ujemny, funkcja jest wypukła w dół jeśli jest dodatni, funkcja jest wypukła w górę.*

2. Druga pochodna funkcji $f(x) = x^3$ dana jest wzorem $f''(x) = 6x$. Jest ona ujemna dla $x < 0$ i dodatnia dla $x > 0$. Zatem funkcja f jest wypukła w górę dla $x < 0$ i wypukła w dół dla $x > 0$.

Definicja 192 *Punkt x_0 nazywamy* punktem przegięcia wykresu funkcji f*, jeżeli przy przejściu x przez x_0 odpowiedni punkt wykresu przechodzi z jednej strony stycznej (wystawionej w punkcie $(x_0, f(x_0))$) na drugą stronę.*

Uwaga 193 *W punkcie przegięcia funkcja zmienia się z wypukłej w dół na wypukłą w górę bądź z wypukłej w górę na wypukłą w dół.*

Twierdzenie 194 ***(Warunek konieczny punktu przegięcia)*** *Jeśli x_0 jest punktem przegięcia dwukrotnie różniczkowalnej funkcji f, to druga pochodna zeruje się w tym pukcie*

$$f''(x_0) = 0.$$

Uwaga 195 *Samo zerowanie się drugiej pochodnej nie wystarcza do tego, aby funkcja miała punkt przegięcia.*

Przykład 196 *1. Druga pochodna funkcji $x \mapsto x^3$ zeruje się w $x_0 = 0$. Jest to punkt przegięcia funkcji.*

2. Druga pochodna funkcji $f(x) = x^4$ to $f''(x) = 12x^2$, zeruje się ona w $x_0 = 0$, jednak funkcja nie ma tu punktu przegięcia.

Twierdzenie 197 ***(Warunek dostateczny punktu przegięcia)*** *Jeżeli w punkcie x_0 druga pochodna funkcji zmienia znak, to punkt ten jest punktem przegięcia.*

Uwaga 198 *Jeśli w punkcie przegięcia istnieje druga pochodna, to jest ona równa zero (porównaj z sytuacją, gdy w ekstremum pierwsza pochodna zmienia znak).*

Uwaga 199 *Jeśli druga pochodna zmienia znak, to znaczy, że funkcja zmienia się z wypukłej w dół na wypukłą w górę lub z wypukłej w górę na wypukłą w dół.*

Twierdzenie 200 ***(Warunek dostateczny punktu przegięcia)*** *Jeżeli w punkcie x_0 druga pochodna funkcji się zeruje, a trzecia jest niezerowa, to punkt ten jest punktem przegięcia.*

Uwaga 201 *Jeśli trzecia pochodna funkcji jest dodatnia lub ujemna, to znaczy, że druga pochodna jest rosnąca lub malejąca, zatem przechodząc przez zero zmienia znak.*

Przykład 202

1. *Druga pochodna funkcji $x \mapsto x^3$ zmienia w $x_0 = 0$ znak z $-$ na $+$.*
2. *Druga pochodna funkcji $f(x) = x^4$ to jest po obu stronach $x_0 = 0$ dodatnia.*

Przykład 203 *Znajdziemy punkt przegięcia funkcji $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 4$. W tym celu obliczamy pierwszą i drugą pochodne:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 2x, \\ f''(x) &= x - 2. \end{aligned}$$

Druga pochodna zmienia znak przy przejściu przez $x = 2$, zatem jest to punkt przegięcia wykresu funkcji f.

Podsumowanie: Badanie przebiegu zmienności funkcji

Badanie przebiegu zmienności funkcji polega na przeprowadzeniu następujących kroków:

1. Analiza funkcji
   - (a) wyznaczenie dziedziny naturalnej funkcji
   - (b) obliczenie granic funkcji na krańcach przedziałów określoności
   - (c) wyznaczenie punktów przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych
   - (d) badanie istnienia asymptot
   - (e) badanie parzystości, okresowości
2. Analiza pierwszej pochodnej
   - (a) wyznaczenie pierwszej pochodnej oraz jej dziedziny
   - (b) badanie znaku pochodnej w celu wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji
   - (c) wyznaczenie ekstremów funkcji (jeśli istnieją)
3. Analiza drugiej pochodnej
   - (a) wyznaczenie drugiej pochodnej oraz jej dziedziny
   - (b) badanie znaku pochodnej w celu wyznaczenia przedziałów wypukłości (w górę i w dół) funkcji
   - (c) wyznaczenie punktów przegięcia (jeśli istnieją)
4. Sporządzenie tabelki zmienności funkcji
5. Sporządzenie wykresu funkcji

Krotność pierwiastków wielomianu

Twierdzenie 204 *Liczba a jest n–krotnym pierwiastkiem wielominu p wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\begin{aligned} &p(a) = 0, \\ &p'(a) = 0, \\ &\dots \\ &p^{(n-1)}(a) = 0, \\ &p^{(n)}(a) \neq 0. \end{aligned}$$

Dowód. (tylko $\Longrightarrow$)
Niech a będzie n–krotnym pierwiastkiem wielomianu p, czyli

$$p(x) = (x-a)^n \cdot q(x),$$

gdzie q jest wielomianem, takim że $q(a) \neq 0$. Mamy

$$\begin{aligned} p(a) &= 0, \\ p'(x) &= n \cdot (x-a)^{n-1} \cdot q(x) + (x-a)^n \cdot q'(x), \\ p'(a) &\begin{cases} \neq 0, & \text{jeśli } n = 1, \\ = 0 & \text{jeśli } n > 1 \end{cases}, \\ &\dots \\ p^{(n-1)}(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} [(x-a)^n]^{(k)} \cdot q^{(n-1-k)}(x). \end{aligned}$$

k–ta pochodna wyrażenia $(x-a)^n$ jest zawsze postaci $c(x-a)^{n-k}$, gdzie c to pewna stała. Skoro $k < n$ (bo $k = 0, 1, \dots, n-1$), występuje czynnik $(x-a)$, który się zeruje dla $x = a$. Stąd $p^{(n-1)}(a) = 0$.

$$p^n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [(x-a)^n]^{(k)} \cdot q^{(n-k)}(x).$$

W sumie tej występują pochodne rzędów $0, 1, \dots, n-1$ wyrażenia $(x-a)^n$, które się zerują dla $x = a$ oraz składnik $[(x-a)^n]^{(n)} \cdot q(x)$; jest on równy $n! \cdot q(x)$ i dla $x = a$ różny od zera.

Przykład 205 *Wielomian $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)(x^2-1) = (x+1)^2(x-1)$ ma w $x = -1$ pierwiastek podwójny.*

$$\begin{aligned} &p(-1) = \{[1(-1)+1](-1)-1\}(-1)-1 = [0 \cdot (-1) - 1](-1) - 1 = 1 - 1 = 0, \\ &p'(x) = 3x^2 + 2x - 1, \\ &p'(-1) = [3(-1)+2](-1) - 1 = (-1)(-1) - 1 = 1 - 1 = 0, \\ &p''(x) = 6x + 2, \\ &p''(-1) = -4 \neq 0. \end{aligned}$$

Szereg Taylora

Jeżeli funkcja f ma w otoczeniu pewnego punktu $x_0 = a$, tzn. w pewnym przedziale $(a-r, a+r)$ pochodne dowolnie dużych rzędów, to można ją przedstawić *wzorem Taylora* przy n dowolnie dużym

$$\underbrace{f(x)}_{\text{wartość funkcji}} = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}}_{\text{suma częściowa}} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n}_{\text{reszta}},$$

gdzie $c = c(x) \in (x, a)$ lub $c = c(x) \in (a, x)$. Jeśli dla każdego x z przedziału $(a-r, a+r)$ reszta dąży do zera przy $n \to \infty$, to mówimy, że funkcja daje się w tym przedziale rozwinąć w *szereg Taylora* i piszemy

$$\underbrace{f(x)}_{\text{wartość funkcji}} = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots}_{\text{szereg Taylora}}$$

dla $|x-a| < r$. Prawa strona jest *sumą szeregu nieskończonego*. Piszemy również

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad \text{dla } |x-a| < r,$$

przy czym $f^{(0)}$ oznacza funkcję zróżniczkowaną 0 razy, czyli po prostu funkcję f.

Jeżeli w szeregu Taylora weźmiemy $a = 0$, otrzymamy *szereg Maclaurina*

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n + \dots.$$

Uwaga 206 *Warunek zbieżności reszt do zera jest spełniony w szczególności wtedy, gdy wszystkie pochodne są wspólnie ograniczone w przedziale $(a-r, a+r)$, tzn.*

$$|f^{(n)}(x)| < M$$

dla dowolnego n i $x \in (a-r, a+r)$.

Przykład 207 *Rozwińmy w szereg Maclaurina funkcję sinus:*

$$\begin{aligned}
&\sin'(x) = \cos x,\\
&\sin''(x) = -\sin x,\\
&\sin'''(x) = -\cos x,\\
&\sin^{(4)}(x) = \sin x,\\
&\sin^{(4k+1)}(x) = \cos x, \quad \sin^{(4k+2)}(x) = -\sin x, \quad \sin^{(4k+3)}(x) = -\cos x, \quad \sin^{(4k)}(x) = \sin x.
\end{aligned}$$

Wszystkie te pochodne są jednostajnie (tzn. przez tę samą liczbę) ograniczone dla $x \in \mathbb{R}$. Ponadto $f^{(2k)}(0) = \pm\sin 0 = 0$ oraz $f^{(2k+1)}(x) = \pm\cos 0 = \pm 1$. Stąd

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} + \dots$$

dla $x \in \mathbb{R}$.

Przykład 208 *1. Rozwińmy w szereg Taylora funkcję $f(x) = 10x^5 + 7x^4 - 12x^3 + x^2 - 3x + 5$ w otoczeniu punktu $x = 1$. Policzmy pochodne*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 50x^4 + 28x^3 - 36x^2 + 2x - 3, & f'(1) &= 41,\\
f''(x) &= 200x^3 + 84x^2 - 72x + 2, & f''(1) &= 214,\\
f'''(x) &= 600x^2 + 168x - 72, & f'''(1) &= 696,\\
f^{(4)}(x) &= 1200x + 168, & f^{(4)}(1) &= 1368,\\
f^{(5)}(x) &= 1200, & f^{(5)}(1) &= 1200,
\end{aligned}$$

a wszystkie dalsze pochodne są równe zeru. Ponadto

$$f(1) = 10 + 7 - 12 + 1 - 3 + 5 = 8$$

i po podstawieniu do wzoru otrzymujemy

$$\begin{aligned}
f(x) &= 8 + \frac{41}{1!}(x-1) + \frac{214}{2!}(x-1)^2 + \frac{696}{3!}(x-1)^3 + \frac{1368}{4!}(x-1)^4 + \frac{1200}{5!}(x-1)^5\\
&= 8 + 41(x-1) + 107(x-1)^2 + 116(x-1)^3 + 57(x-1)^4 + 10(x-1)^5.
\end{aligned}$$

2. Rozwińmy w szereg Taylora funkcję $f(x) = 10x^5 + 7x^4 - 12x^3 + x^2 - 3x + 5$ w otoczeniu punktu $x = 0$. Wartości pochodnych w zerze wynoszą

$$\begin{aligned}
f'(0) &= -3,\\
f''(0) &= 2,\\
f'''(0) &= -72,\\
f^{(4)}(0) &= 168,\\
f^{(5)}(0) &= 1200,
\end{aligned}$$

a każda następna zero, ponadto $f(0) = 5$. Stąd

$$\begin{aligned}
f(x) &= 5 + \frac{-3}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{-72}{3!}x^3 + \frac{168}{4!}x^4 + \frac{1200}{5!}x^5\\
&= 5 - 3x + x^2 + 12x^3 + 7x^4 + 10x^5.
\end{aligned}$$

Jest to rozwinieęcie tej samej postaci, co funkcja wyjściowa.

Reguła de l'Hospitala

Twierdzenie 209 *Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki*

1.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \quad lub \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty,$$

2. istnieje granica $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

to

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Podobnie dla granic lewo– i prawostronnych oraz w plus minus nieskończoności.

Służy to obliczaniu wartości granic przy wyrażeniach nieoznaczonych typu $\left[\frac{0}{0}\right]$ oraz $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Przykład 210 *1. Oblicz* $\lim_{x\to 0}\frac{xa^x}{a^x-1}$, *gdzie* $a>0$, $a\neq 1$.
Rozwiązanie *Mamy* $\lim_{x\to 0} xa^x = 0$ *oraz* $\lim_{x\to 0} a^x-1=0$, *zatem można zastosować regułę de l'Hospitala.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{xa^x}{a^x-1}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a^x+xa^x\ln a}{a^x\ln a}=\frac{1+0}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}.$$

2. Oblicz $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$. ***Rozwiązanie*** *Mamy* $\lim_{x\to 0} e^{3x}-3x-1=0$ *oraz* $\lim_{x\to 0 \sin^2 5x}=0$, *zatem można zastosować regułę de l'Hospitala.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-3}{2\sin 5x\cdot\cos 5x\cdot 5}=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-3}{5\sin 10x}.$$

Jest to znów wyrażenie postaci $\left[\frac{0}{0}\right]$. *Zatem*

$$\ldots\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{9e^{3x}}{50\cos 10x}=\frac{9}{50}.$$

3. Oblicz $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$. ***Rozwiązanie*** *Jest to wyrażenie postaci* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x}=-\lim_{x\to 0^+}\sin x\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=0\cdot 1=0$$

Uwaga 211 *Przy stosowaniu reguły de l'Hospitala trzeba sprawdzić, czy mamy do czynienia z wyrażeniem postaci* $\left[\frac{0}{0}\right]$ *lub* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$*!*

Uwaga 212 *Wyrażenia postaci* $[0\cdot\infty]$ *przekształcamy za pomocą*

$$f(x)g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

w wyrażenia typu $\left[\frac{0}{0}\right]$ *lub* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, *natomiast wyrażenia typu* $[\infty-\infty]$ *przekształcamy stosując wzór*

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}.$$

Wyrażenia postaci $[0^0]$, $[\infty^0]$ *oraz* $[1^\infty]$ *przekształcamy za pomocą*

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

w wyrażenia typu $[0\cdot\infty]$.

Przykład 213 *1.*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(x-\frac{\pi}{2})\operatorname{tg} x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\operatorname{ctg} x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(-\sin^2 x)=-1$$

2.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{2}$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\cdot\ln a}{1}=\ln a$$

(granica ta była podana jako przykład granic specjalnych)

Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej

Definicja 214 Funkcją pierwotną *funkcji f w przedziale (a, b) nazywamy kadą taką funkcję F, której pochodna $F'(x)$ równa się wartości funkcji $f(x)$ w każdym punkcie x z przedziału (a, b).*

Przykład 215 *Funkcją pierwotną funkcji sinus jest minus cosinus, ponieważ*

$$(-\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Funkcją pierwotną sinusa jest również $f(x) = -\cos x + 5$, ponieważ

$$(-\cos x + 5)' = \sin x \qquad \forall x.$$

Twierdzenie 216 *Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. Wówczas*

1. *$G(x) = F(x) + C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$, jest funkcją pierwotną funkcji f na I,*
2. *każda funkcja pierwotna funkcji f na I daje się zapisać jako $H(x) = F(x) + C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$.*

Twierdzenie 217 *Jeżeli funkcja jest ciągła w przedziale, to ma w tym przedziale funkcję pierwotną.*

Definicja 218 Całką nieoznaczoną *funkcji f nazywamy zbiór funkcji $\{F(\cdot) + C : C \in \mathbb{R}\}$, gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f. Używamy symbolu $\int f$ lub $\int f(x)dx$.*

Zachodzi zatem

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad \text{gdzie } F'(x) = f(x).$$

Podstawowe wzory rachunku całkowego:

1. $\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, dla $a \neq -1$, $x \in \mathbb{R}_+$ (bo $\left(\frac{x^{a+1}}{a+1} + C\right)' = \frac{(a+1) \cdot x^a}{a+1} = x^a$)

   Jeśli a jest liczbą naturalną, zastrzeżenie $x \in \mathbb{R}$; jeśli jest liczbą całkowitą ujemną, wystarczy założyć $x \neq 0$.

   Przykład 219 *Kilka przypadków szczególnych:*

   (a) $\int dx = x + C$

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C,\ x \in \mathbb{R}_+$

(c) $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,\ x \neq 0$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $x \neq 0$ (bo $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$)
3. $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, $\cos x \neq 0$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$, $\sin x \neq 0$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$, $-1 < x < 1$
10. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C_1 = -\operatorname{arcctg} x + C_2$

Twierdzenie 220 *Niech funkcja f ma funkcję pierwotną w przedziale I. Wówczas*

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$$

dla każdego $x \in I$.

Przykład 221

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R},$$
$$(-\cos x + C)' = \sin x.$$

Uwaga 222 *Formalnie całka nieoznaczona jest* zbiorem. *W obliczeniach traktuje się ją jako* funkcję *o nieustalonym parametrze C.*

Twierdzenie 223 *Niech funkcja f będzie różniczkowalna w przedziale I. Wówczas*

$$\int f'(x)\, dx = f(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

dla każdego $x \in I$.

Przykład 224

$$(\sin x)' = \cos x,$$
$$\int \cos x\, dx = \sin x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie 225 *Całkowanie jest operacją liniową, tzn.*

1. *jest addytywne (całka sumy jest równa sumie całek):*

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

2. *oraz jednorodne (stały czynnik można wynieść przed znak całki):*

$$\int [a\cdot f(x)]dx = a\cdot \int f(x)\,dx.$$

Przykład 226 *Całki z wielomianów:*

$$\int \sum_{k=0}^{n}\left(a_k x^k\right)dx = \sum_{k=0}^{n}\int a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int x^k dx = \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + C$$

1. $\int(2x^2-3x+1)dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + C,$
2. $\int(7x^6-6x^5+5x^4-4x^3+3x^2-2x+1)dx = x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x+C,$
3. $\int(3x^3+x^2-x-1)dx = \frac{3x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x+C.$

Przykład 227

$$\begin{aligned}
\int \frac{x(\sqrt{x}-x^2\sqrt[3]{x})}{\sqrt[4]{x}}\,dx &= \int \frac{x(x^{1/2}-x^2\cdot x^{1/3})}{x^{1/4}}\,dx = \int \frac{x\cdot x^{1/2} - x\cdot x^2\cdot x^{1/3}}{x^{1/4}}\,dx \\
&= \int \frac{x^{1+1/2}-x^{1+2+1/3}}{x^{1/4}}dx = \int \left(x^{3/2-1/4}-x^{10/3-1/4}\right)dx \\
&= \int \left(x^{5/4}-x^{37/12}\right)dx = \int x^{5/4}\,dx - \int x^{37/12}\,dx \\
&= \frac{x^{9/4}}{9/4} - \frac{x^{49/12}}{49/12} + C = \frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x} - \frac{12}{49}x^4\sqrt[12]{x} + C
\end{aligned}$$

Twierdzenie 228 ***(Całkowanie przez części)*** *Jeżeli funkcje u i v mają ciągłe pochodne, to*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Dowód. Ze wzorów rachunku różniczkowego wynika, że

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Całkując obustronnie i przestawiając wyrazy otrzymamy wzór na całkowanie przez części.

Przykład 229 *1.*

$$\begin{aligned}
\int x^2\ln x\,dx &= \left[\begin{array}{c|c} u=\ln x & u'=1/x \\ v'=x^2 & v=x^3/3 \end{array}\right] = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3x}\,dx \\
&= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C
\end{aligned}$$

Uwaga 230 *Dopóki w przekształcanym wyrażeniu występuje całka nieoznaczona, nie ma potrzeby pisania stałej C, jest ona bowiem zawarta w całce. Po obliczeniu ostatniej całki nie można zapomnieć o stałej.*

2.

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,dx &= \left[\begin{array}{c|c} u=x^2 & u'=2x \\ v'=\cos x & v=\sin x\end{array}\right] = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx \\ &= \left[\begin{array}{c|c} u=x & u'=1 \\ v'=\sin x & v=-\cos x\end{array}\right] = x^2\sin x - 2\left[-x\cos x - \int(-\cos x)dx\right] \\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int\cos x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int e^x\cos x\,dx &= \left[\begin{array}{c|c} u=e^x & u'=e^x \\ v'=\cos x & v=\sin x\end{array}\right] = e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx \\ &= \left[\begin{array}{c|c} u=e^x & u'=e^x \\ v'=\sin x & v=-\cos x\end{array}\right] = e^x\sin x - \left[-e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx\right] \\ &= e^x(\sin x+\cos x) - \int e^x\cos x\,dx\end{aligned}$$

Całka z $e^x\cos x$ występuje po obu stronach, można zatem obliczyć jej wartość rozwiązując równanie

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x(\sin x+\cos x) - \int e^x\cos x\,dx.$$

Pamiętać trzeba, że całka jest określona z dokładnością do stałej, czyli po lewej i po prawej stronie równania moż emieć różne wielkości. Zapiszemy to jako

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x(\sin x+\cos x) - \int e^x\cos x\,dx + C.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy

$$\int e^x\cos x\,dx = \frac{e^x(\sin x+\cos x)}{2} + C.$$

Zwróćmy uwagę, że C oznacza teraz inna stałą niż w równaniu powyżej.

Uwaga 231 *Przy całkowaniu przez części jako funkcję v', czyli tę, która podlegać będzie całkowaiu, wybieramy funkcję, która ma całkę wyrażalną w prosty sposób, np. sinus, cosinus lub funkcję wykładniczą, czasem też funkcję potęgową (patrz pierwszy przykład). W przypadku jednomianów staramy się zazwyczaj obniżyć ich stopień, patrz przykład drugi.*

Twierdzenie 232 ***(Całkowanie przez podstawianie)*** *Jeżeli*

1. *funkcja $f: I\to\mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale I,*

2. *funkcja $u: J\to I$ ma ciągłą pochodną na przedziale J,*

to

$$\int f\left(u(x)\right)u'(x)\,dx = \int f(t)dt = F(u(x)) + C,$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f.

Przykład 233 *1.*

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left[\begin{array}{c} u = \cos x \\ u' = -\sin x \end{array}\right] = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C$$
$$= -\ln|\cos x| + C, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

2.

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x^2 - 1 \\ du = 2x\,dx \end{array}\right] = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{x^2-1} + C,$$
$$x^2 - 1 > 0$$

Uwaga 234 *Zwróćmy uwagę na różnice w zapisie przy wprowadzeniu zmiennej pomocniczej u. W drugim przykładzie stosujemy różniczkę nowej funkcji $du = u'dx$.*

Przykład 235 *1.*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} = \left[\begin{array}{c} t = \sqrt{2x-3} \\ t^2 = 2x - 3 \\ 2t\,dt = 2dx \end{array}\right] = \int \frac{t\,dt}{t} = \int dt = t + C = \sqrt{2x-3} + C,$$

$x > \frac{3}{2}$, *lub przy innym podstawieniu:*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} = \left[\begin{array}{c} t = 2x - 3 \\ dt = 2dx \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{2x-3} + C,$$

$x > \frac{3}{2}$

2.

$$\int x^2\sqrt{2x^3-3}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = \sqrt{2x^3-3} \\ t^2 = 2x^3 - 3 \\ 2t\,dt = 6x^2\,dx \end{array}\right] = \int t\cdot\frac{t}{3}\,dt = \frac{1}{3}\int t^2\,dt$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{9}\left(\sqrt{2x^3-3}\right)^3 + C, \qquad x \geq \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

lub przy innym podstawieniu:

$$\int x^2\sqrt{2x^3-3}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 2x^3 - 3 \\ dt = 6x^2\,dx \end{array}\right] = \frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{1}{9}\left(\sqrt{t}\right)^3 + C = \frac{1}{9}\left(\sqrt{2x^3-3}\right)^3 + C, \qquad x \geq \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

Całki oznaczone

Definicja 236 Podziałem odcinka $[a, b]$ *na* n *części,* $n \in \mathbb{N}$, *nazywamy zbiór*

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

gdzie $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Definicja 237 *Niech funkcja* f *będzie ograniczona na przedziale* $[a, b]$ *oraz niech* P *będzie podziałem tego przedziału.* Sumą całkową *funkcji* f *odpowiadającą podziałowi* P *oraz punktom pośrednim* ξ_k *tego podziału, gdzie* $\xi \in [x_{k-1}, x_k]$ *dla* $1 \leq k \leq n$, *nazywamy liczbę*

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, \qquad \text{gdzie } \Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

Przykład 238

1. *Weźmy funkcję* $f(x) = 3$ *na odcinku* $[1, 2]$. *Niech* P *będzie pewnym podziałem tego odcinka na* n *części oraz* ξ_k *dowolnym elementem przedziału* $[x_{k-1}, x_k]$. *Wówczas*

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 3(x_k - x_{k-1}) = 3(x_n - x_0) = 3(2 - 1) = 3.$$

2. *Weźmy funkcję* $f(x) = x$ *na odcinku* $[1, 2]$. *Niech* P *będzie podziałem tego odcinka na* n *równych części oraz* $\xi_k = x_{k-1}$. *Wówczas*

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \cdot \frac{2-1}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_{k-1}}{n} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n} \left(1 + (k-1) \cdot \frac{1}{n}\right)}{n} = \frac{n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)}{n} = 1 + \frac{\frac{1}{n}\frac{(0+n-1)\cdot n}{2}}{n} \\ &= 1 + \frac{n-1}{2n}. \end{aligned}$$

3. *Weźmy funkcję* $f(x) = x$ *na odcinku* $[1, 2]$. *Niech* P *będzie podziałem tego odcinka na* n *równych części oraz* $\xi_k = x_k$. *Wówczas*

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \frac{2-1}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)}{n} = \frac{n + \frac{1}{n} \cdot \frac{(1+n)\cdot n}{2}}{n} = 1 + \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

Definicja 239 *Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale $[a, b]$.* Całkę oznaczoną Riemanna *z funkcji f na przedziale $[a, b]$ definiujemy jako*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

gdzie $\delta(P) = \max_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\}$, o ile po prawej stronie znaku równości granica jest właściwa oraz nie zależy od sposobu podziału P przedziału ani od sposobu wyboru punktów pośrednich ξ_k. Ponadto przyjmujemy

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{dla } a < b.$$

Przykład 240 *Dla funkcji $f(x) = x$ na odcinku $[1, 2]$ oraz podziału P_n odcinka na n równych części mamy*

$$\lim_{n\to\infty} \delta(P) = 0.$$

Przy wyborze $\xi_k = x_{k-1}$ granica sum całkowych wynosi

$$\lim_{\delta(P)\to 0} S = \lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{n-1}{2n}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Przy wyborze $\xi_k = x_k$ granica sum całkowych wynosi

$$\lim_{\delta(P)\to 0} S = \lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{n+1}{2n}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Można udowodnić, że granica ta nie zależy od podziału odcinka (dopuszczalne są również podziały nierównomierne) ani od wyboru punktów ξ_k. Mamy

$$\int_1^2 x\,dx = \frac{3}{2}.$$

Przykład 241 *Funkcja*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

jest niecałkowalna w sensie Riemanna. Dla dowolnego podziału odcinka punkty pośrednie można zarówno wybrać tak, aby $f(\xi_k) = 1$, jak i $f(\xi_k) = 0$, zatem sumy całkowe są zależne od wyboru punktów.

Definicja 242 *Punkt nieciągłości funkcji f nazywamy* pierwszego rodzaju*, jeżeli istnieją skończone granice lewostronna i prawostronna funkcji f w tym punkcie. W przeciwnym wypadku mówimy o nieciągłościach* drugiego rodzaju*.*

Twierdzenie 243 *Jeżeli funkcja f jest ograniczona na przedziale $[a, b]$ i ma na tym przedziale skończenie wiele nieciągłości, wszystkie pierwszego rodzaju, to jest na nim całkowalna.*

Przykład 244 *Funkcja $f(x) = x$ jest na odcinku $[1, 2]$ ciągła. Jest zatem całkowalna, tzn. granica sum całkowych istnieje i nie zależy od podziału odcinka ani od wyboru punktów ξ_k. Stosując powyższe twierdzenie nie musimy tego udowadniać na gruncie rachunku granic.*

Twierdzenie 245 ***(Newtona–Leibnitza)*** *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, to*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f w tym przedziale.

Przykład 246 *Niech F oraz G będą funkcjami pierwotnymi funkcji f. Wówczas istnieje stała C, taka że $F(x) = G(x) + C$ dla każdego x. Stąd wynika*

$$F(b) - F(a) = [G(b) + C] - [G(a) + C] = G(b) + C - G(a) - C = G(b) - G(a).$$

Twierdzenie 247 *Całki oznaczone są* addytywne względem przedziału całkowania*, tzn. jeżeli $a \le b \le c$, to zachodzi*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Przykład 248

$$\int_1^3 3x^2\,dx = x^3|_1^3 = 3^3 - 1^3 = 27 - 1 = 26,$$
$$\int_3^4 3x^2\,dx = x^3|_3^4 = 4^3 - 3^3 = 256 - 27 = 229,$$
$$\int_1^4 3x^2\,dx = x^3|_1^4 = 4^3 - 1^3 = 256 - 1 = 255 = 26 + 229.$$

Uwaga 249 *Symbol $F(x)|_a^b$ oznacza $F(b) - F(a)$. Jeśli w wyrażeniu $F(x)$ występuje suma, używamy nawiasów kwadratowych:*

$$[\cdots + \cdots + \ldots]_a^b$$

Twierdzenie 250 *Całkowanie jest operacją* liniową*, tzn.*

1. *jest* addytywne*:*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2. *oraz* jednorodne*:*

$$\int_a^b [c \cdot f(x)]dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

Przykład 251

$$\int_0^2 (x^2 + 7)dx = \left[\frac{x^3}{3} + 7x\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} + 7 \cdot 2 - \frac{0^3}{3} - 7 \cdot 0 = \frac{8}{3} + 14$$
$$= \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} + 7 \cdot 2 - 7 \cdot 0 = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 + 7x|_0^2 = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 7\,dx$$

Twierdzenie 252 ***(Całkowanie przez części)*** *Jeżeli funkcje u i v mają w przedziale $[a, b]$ ciągłe pochodne, to*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Przykład 253

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = \left[\begin{array}{c|c} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right] = [-x\cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$$
$$= 0 + [\sin x]_0^{\pi/2} = 1.$$

Twierdzenie 254 ***(Całkowanie przez podstawianie)*** *Jeżeli*

1. *funkcja g ma w przedziale (a, b) ciągłą pochodną,*
2. *funkcja f jest ciągła w przedziale $[g(a), g(b)]$,*

to zachodzi

$$\int_a^b f\left(g(x)\right) g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt.$$

Przykład 255

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos x\,dx = \left[\begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array}\right] = \int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Uwaga 256 *Przy całkowaniu przez podstawianie trzeba pamiętać o zmianie granic całkowania. Z tego powodu często łatwiej jest obliczyć przez podstawianie całkę nieoznaczoną, a nastęonie podstawić wartości końców przedziału.*

Twierdzenie 257 *Niech funkcja f będzie całkowalna w przedziale $[a, b]$ oraz niech funkcja g różni się od funkcji f tylko w skończonej liczbie punktów tego przedziału. Wtedy funkcja g jest również całkowalna w przedziale $[a, b]$ oraz*

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Zastosowania całki oznaczonej

Twierdzenie 258 *Jeżeli w przedziale $[a, b]$ funkcja f jest ciągła oraz $f(x) \geq 0$, to pole obszaru ograniczonego łukiem krzywej $y = f(x)$, odcinkiem osi X oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ wynosi*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Przykład 259 *Oblicz pole figury poniżej wykresu funkcji $f(x) = x + 1$, pomiędzy prostymi $x = 1$ oraz $x = 2$.* ***Rozwiązanie.*** *Ponieważ dla $x \in [1, 2]$ zachodzi $f(x) > 0$, mamy*

$$P = \int_1^2 (x+1)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = \frac{2^2}{2} + 2 - \frac{1^2}{2} - 1 = \frac{5}{2}.$$

Z drugiej strony figura ta jest trapezem o podstawach długości 2 (przy $x = 1$) oraz 3 (przy $x = 2$) i wysokości 1. Stąd

$$P = \frac{(2+3)\cdot 1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Definicja 260 Trapez krzywoliniowy *jest to figura ograniczona dwiema krzywymi, nieprzecinającymi się, i dwiema prostymi równoległymi.*

Twierdzenie 261 *Niech funkcje f i g będą ciągłe na przedziale $[a, b]$ oraz niech $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$. Wówczas pole trapezu krzywoliniowego ograniczonego wykresami funkcji f i g oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ wyraża się wzorem*

$$P = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx.$$

Przykład 262 *Oblicz pole figury zawartej pomiędzy krzywymi $y = x^2 - 1$ i $y = -x^2 + 1$.*
Rozwiązanie. *Figura ta jest trapezem krzywoliniowym, zawartym pomiędzy prostymi $x = -1$ i $x = 1$. Ponadto dla $x \in (-1, 1)$ zachodzi $-x^2 + 1 > x^2 - 1$. Zatem*

$$\begin{aligned} P &= \int_{-1}^{1} [-x^2 + 1 - (x^2 - 1)]dx = \int_{-1}^{1} (-2x^2 + 2)dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{-2}{3} + 2 + \frac{-2}{3} + 2 = 2\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 263 *Niech funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$. Wtedy długość krzywej*

$$\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$$

wyraża się wzorem

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2}\, dx.$$

Przykład 264 *Długość łuku krzywej $y = \sqrt{1 - x^2}$ dla $x \in [-1, 1]$ wynosi*

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sqrt{1 - x^2}\right)' = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \\ L &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1 - x^2 + x^2}{1 - x^2}}\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}}\, dx = \arcsin x|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Zauważmy, że krzywa ta jest półokręgiem o promieniu 1. Jej długość obliczona w sposób elementarny wynosi π.

Twierdzenie 265 *Niech funkcja nieujemna f będzie ciągła w przedziale $[a, b]$ oraz niech T oznacza trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem funkcji f, osią OX oraz prostymi $x = a$ i $x = b$. Wówczas*

1. *objętość bryły powstałej z obrotu trapezu krzywoliniowego T, ograniczonego osią OX, prostymi $x = a$ i $x = b$ oraz wykresem nieujemnej funkcji f, wokół osi OX wyraża się wzorem*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx,$$

2. *objętość bryły powstałej z obrotu trapezu krzywoliniowego T, ograniczonego osią OY, wykresem funkcji f, monotonicznej na przedziale $[a,b]$, oraz prostymi $y = f(a)$ i $y = f(b)$, wokół osi OY wyraża się wzorem*

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

Twierdzenie 266 *Niech funkcja nieujemna f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a,b]$. Wówczas*

1. *pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji f wokół osi OX wyraża się wzorem*

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + |f'(x)|^2}\, dx,$$

2. *pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji f wokół osi OY wyraża się wzorem*

$$P = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + |f'(x)|^2}\, dx.$$

Przykład 267 1. *Oblicz pole powierzchni figury powstałej z obrotu łuku krzywej*

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \qquad x \in [-1, 1],$$

wokół osi OX oraz objętość wyznaczonej przez nią bryły. ***Rozwiązanie.***

$$P = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-1}^1 1\, dx = 4\pi,$$

$$V = \pi \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \pi \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1$$

$$= \pi \left(1 - \frac{1}{3} - (-1) + \frac{-1}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}.$$

Figura ta jest sferą o promieniu 1. Wyznaczone elementarnie pole i objętość wynoszą odpowiednio 4π i $\frac{4\pi}{3}$.

2. *Oblicz pole powierzchni figury powstałej z obrotu łuku krzywej*

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \qquad x \in [0, 1],$$

wokół osi OY oraz objętość wyznaczonej przez nią bryły. ***Rozwiązanie.***

$$P = 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}}\, dx = \left[\begin{array}{c} u = 1 - x^2 \\ du = -2x\, dx \end{array}\right] = -\pi \int_1^0 \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$= -\pi \left[2\sqrt{u}\right]_1^0 = -2\pi(0 - 1) = 2\pi,$$

$$V = 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt{1 - x^2}\, dx = \left[\begin{array}{c} u = 1 - x^2 \\ du = -2x\, dx \end{array}\right] = -\pi \int_1^0 \sqrt{u}\, du$$

$$= -\pi \left[\frac{2u^{3/2}}{3}\right]_1^0 = -\frac{2\pi}{3} \cdot (0 - 1) = \frac{2\pi}{3}.$$

Figura ta jest półsferą o promieniu 1. Wyznaczone elementarnie pole i objętość wynoszą odpowiednio 2π i $\frac{2\pi}{3}$.

Całki niewłaściwe

Definicja 268 *1. Niech funkcja f będzie określona na przedziale $[a,\infty)$.* Całkę niewłaściwą I rodzaju funkcji f na $[a,\infty)$ *definiujemy wzorem*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_a^T f(x)\,dx.$$

2. Niech funkcja f będzie określona na przedziale $(-\infty,b]$. Całkę niewłaściwą I rodzaju funkcji f na $(-\infty,b]$ *definiujemy wzorem*

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{T\to-\infty}\int_T^b f(x)\,dx.$$

3. Niech funkcja f będzie określona na przedziale $(-\infty,\infty)$. Całkę niewłaściwą I rodzaju funkcji f na $(-\infty,\infty)$ *definiujemy wzorem*

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx,$$

gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Jeżeli granica jest właściwa, mówimy, że całka jest zbieżna. Jeżeli granica jest równa $\pm\infty$, mówimy, że całka jest rozbieżna odpowiednio do $-\infty$ lub $+\infty$. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest rozbieżna.

Przykład 269 *1.*

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{T\to\infty}\int_1^T \frac{dx}{x^2} = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^T = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{-1}{T}+1\right) = 1$$

2.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\,dx &= \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}\,dx + \int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{ccc} u & = & -x^2 \\ du & = & -2x\,dx\end{array}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left(\int_\infty^0 e^u\,du + \int_0^{-\infty} e^u\,du\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^u\,du + \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^0 e^u\,du\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\lim_{T\to\infty} e^u|_0^T + \lim_{T\to\infty} e^u|_{-T}^0\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{T\to\infty} e^T - 1 + 1 - \lim_{T\to\infty} e^{-T}\right) = \infty\end{aligned}$$

3.

$$\int_0^\infty \cos x\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \cos x\,dx = \lim_{T\to\infty}\sin x|_0^T = \lim_{T\to\infty}\sin T$$

nie istnieje

Definicja 270 *1. Niech funkcja f określona na przedziale $(a,b]$ będzie nieograniczona w prawostronnym sąsiedztwie punktu a.* Całkę niewłaściwą II rodzaju funkcji f na $(a,b]$ *definiujemy wzorem*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx.$$

2. *Niech funkcja f określona na przedziale $[a,b)$ będzie nieograniczona w lewostronnym sąsiedztwie punktu b.* Całkę niewłaściwą II rodzaju funkcji f na $[a,b)$ *definiujemy wzorem*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx.$$

3. *Niech funkcja f określona na przedziale $[a,c)\cup(c,b]$ będzie nieograniczona w sąsiedztwie punktu c.* Całkę niewłaściwą II rodzaju funkcji f na $[a,b]$ *definiujemy wzorem*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Przykład 271 *1.*
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0^+} 2(1-\sqrt{\epsilon}) = 2$$

2.
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left.\frac{-1}{x}\right|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(-1+\frac{1}{\epsilon}\right) = \infty$$

3.
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \left(\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}\right) = \left(\lim_{\epsilon\to 0^+} \left.\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\right|_{-1}^{-\epsilon} + \lim_{\epsilon\to 0^+} \left.\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\right|_\epsilon^1\right)$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\frac{3\sqrt[3]{\epsilon^2}}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt[3]{\epsilon^2}}{2}\right) = 0 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 0 = 0$$

4.
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x^3} + \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left.\frac{-1}{2x^2}\right|_{-1}^{-\epsilon} + \lim_{\epsilon\to 0^+} \left.\frac{-1}{2x^2}\right|_\epsilon^1$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{-1}{2\epsilon^2} + \frac{1}{2} + \frac{-1}{2} + \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{2\epsilon^2}$$

Ta całka nie istnieje. Trzeba zwrócić uwgę, że pierwszego i ostatniego wyrażenia nie można skrócić, ponieważ są nieskończone.

Funkcje wielu zmiennych

Definicja 272 Przestrzenią dwuwymiarową (płaszczyzną) *nazywamy zbiór*

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Definicja 273 *1.* Otoczeniem o promieniu r punktu $P(a, b)$ *na płaszczyźnie nazywamy zbiór*

$$O(P) = \{(x, y) : (x - a)^2 + (y - b)^2 < r\}.$$

2. Sąsiedztwem o promieniu r punktu $P(a, b)$ *na płaszczyźnie nazywamy zbiór*

$$S(P) = O(P) \setminus \{P\}$$

Definicja 274 Funkcją f dwóch zmiennych *określoną na zbiorze* $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *o wartościach w* $\mathbb{R}$ *nazywamy jednoznaczne przyporządkowanie każdemu elementowi zbioru* A *liczby rzeczywistej. Funkcję taką oznaczamy przez* $f : A \to \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$, *gdzie* $(x, y) \in A$. *Wartość funkcji* f *w punkcie* (x, y) *oznaczamy przez* $f(x, y)$. *Zbiór* A *jest dziedziną funkcji i oznaczamy go przez* $D(f)$.

Przykład 275 *1.* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \textit{dla } y \le x \\ \frac{1}{2}(y - x) & \textit{dla } y > x \end{cases}$$

2. $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$,

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \textit{gdy } x \textit{ i } y \textit{ są wymierne} \\ 0 & \textit{gdy } x \textit{ i } y \textit{ są niewymierne} \\ -1 & \textit{gdy jedna z liczb jest wymierna, a druga niewymierna} \end{cases}$$

3. $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = y(x^2 - 1)$

Uwaga 276 *Jeżeli funkcja dwóch zmiennych jest określona za pomocą jednego wzoru, np.* $f(x, y) = \sqrt{xy}$, *to rozumiemy to w ten sposób, że funkcja ta jest określona w tym zbiorze, w którym wzór ma sens (tzw. dziedzinie naturalnej). W tym przypadku mamy* $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \ge 0 \textit{ i } y \ge 0) \textit{ lub } (x \le 0 \textit{ i } y \le 0)\}$.

Definicja 277 Wykresem funkcji dwóch zmiennych f *nazywamy zbiór tych punktów w przestrzeni* $\mathbb{R}^3$, *dla których* $z = f(x, y)$,

$$\{(x, y, z) : (x, y) \in D(f),\ z = f(x, y)\}.$$

Uwaga 278 *Na ogół wykresem funkcji dwóch zmiennych jest pewna powierzchnia w przestrzeni trójwymiarowej.*

Definicja 279 *Funkcja dwóch zmiennych, zdefiniowana w pewnym sąsiedztwie punktu* (x_0, y_0), *ma w punkcie* (x_0, y_0) granicę z_0, *jeżeli dla każdego (dowolnie małego)* $\epsilon > 0$ *istnieje* $\delta > 0$, *takie że dla każdego punktu* (x, y) *różnego od* (x_0, y_0) *i spełniającego nierówność* $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ *zachodzi* $|f(x, y) - z_0| < \epsilon$.

Uwaga 280 *Funkcja nie musi być zdefiniowana w punkcie* (x_0, y_0).

Przykład 281 1. *Rozpatrzmy funkcję*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Jej granicą w punkcie $(0, 0)$ *jest* 0. *Dla dowolnego* $\epsilon > 0$ *i* $(x, y) \neq (0, 0)$ *mamy*

$$|f(x,y) - 0| < \epsilon \iff \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \epsilon \iff \left|x^3 + y^3\right| < \epsilon\,(x^2 + y^2)$$
$$\Longleftarrow |x^3| < \epsilon \cdot x^2 \wedge |y^3| < \epsilon \cdot y^2 \iff |x| < \epsilon \wedge |y| < \epsilon \Longleftarrow \sqrt{x^2 + y^2} < \epsilon.$$

Zatem jeśli wybierzemy $\delta = \epsilon$, *spełnione są warunki definicji granicy.*

2. *Rozpatrzmy funkcję*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Nie ma ona granicy w punkcie $(0, 0)$. *Dla każdego punktu* $(x, y) = (a, a)$, $a \neq 0$ *mamy* $f(x, y) = 0$, *natomiast dla każdego punktu* $(x, y) = (a, 0)$, $a \neq 0$ *mamy* $f(x, y) = 1$. *A zatem dla każdego* $\delta > 0$ *w kole o promieniu* δ *i środku* $(0, 0)$ *funkcja przyjmuje wartości* 1 *oraz* 0. *Nie istnieje więc granica w punkcie* $(0, 0)$, *gdyż nie jest prawdą, że* $\forall \epsilon > 0 : |f(x, y)| < \epsilon$.

Definicja 282 Ciągiem punktów *na płaszczyźnie nazywamy odwzorowanie* $P : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$. *Wartość tego odwzorowania dla liczby naturalnej* n *nazywamy* n–tym wyrazem ciągu *i oznaczamy przez* $P_n = (x_n, y_n)$. *Sam ciąg oznaczamy symbolem* (P_n) *lub* $((x_n, y_n))$.

Definicja 283 *Ciąg* $(P_n) = ((x_n, y_n))$ jest zbieżny do punktu $P_0 = (x_0, y_0)$, *jeżeli*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \textit{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Zapisujemy to jako

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \quad \textit{lub} \quad \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0).$$

Przykład 284 1. *Ciąg* $\left(1, 1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ *jest zbieżny do punktu* $(1, 1)$.

2. *Ciąg* $(1, 1 + (-1)^n)$ *jest rozbieżny.*

Definicja 285 *Niech* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *oraz niech funkcja* f *będzie określona dla pewnego sąsiedztwa* $S(x_0, y_0)$. *Liczba* z_0 *jest* granicą właściwą *funkcji* f *w punkcie* (x_0, y_0), *jeżeli dla każdego* $((x_n, y_n)) \subseteq S(x_0, y_0)$ *zachodzi*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0) \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = z_0.$$

Oznaczamy to jako

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = z_0.$$

Uwaga 286 *Definicja ta jest równoważna Definicji 279.*

Przykład 287 *1. Rozpatrzmy funkcję*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Jej granicą w punkcie $(0, 0)$ *jest* 0. *Niech* $((x_n, y_n))$ *będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do* $(0, 0)$. *Wówczas*

$$\frac{x_n^3}{x_n^2} \longrightarrow 0 \quad \wedge \quad \frac{y_n^3}{y_n^2} \longrightarrow 0 \implies \frac{x_n^3}{x_n^2 + y_n^2} \longrightarrow 0 \quad \wedge \quad \frac{y_n^3}{x_n^2 + y_n^2} \longrightarrow 0$$
$$\implies \frac{x_n^3 + y_n^3}{x_n^2 + y_n^2} \longrightarrow 0 \iff f(x_n, y_n) \longrightarrow 0.$$

2. Rozpatrzmy funkcję

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Nie ma ona granicy w punkcie $(0, 0)$. *Weźmy ciąg* $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, *zbieżny do* $(0, 0)$. *Mamy*

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Natomiast dla ciągu $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ *zachodzi*

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0.$$

Definicja 288 *Funkcja dwóch zmiennych jest* ciągła w punkcie (x_0, y_0), *jeżeli jest w tym punkcie określona, posiada granicę oraz granica funkcji jest równa wartości funkcji w tym punkcie.*

Definicja 289 *Funkcję nazywamy* ciągłą w obszarze M, *jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego obszaru.*

Twierdzenie 290 *Suma, różnica, iloczyn, iloraz i złożenie dwóch funkcji ciągłych są funkcjami ciągłymi w swoich dziedzinach.*

Uwaga 291 *Iloraz dwóch funkcji nie jest określony dla tych argumentów, dla których dzielnik jest równy zero.*

Pochodne cząstkowe

Definicja 292 *1.* Pochodną cząstkową (rzędu pierwszego) względem pierwszej zmiennej *funkcji dwóch zmiennych* w punkcie (x_0, y_0) *nazywamy granicę (jeśli istnieje):*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Oznaczamy ją przez $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $f_x(x_0, y_0)$ *lub* $f'_x(x_0, y_0)$.

2. Pochodną cząstkową względem drugiej zmiennej *funkcji dwóch zmiennych* w punkcie (x_0, y_0) *nazywamy granicę (jeśli istnieje):*

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Oznaczamy ją przez $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ *lub* $f'_y(x_0, y_0)$.

Uwaga 293 *Praktycznie pochodną cząstkową (rzędu pierwszego) względem zmiennej x obliczamy tak, jak zwykłą pochodną funkcji jednej zmiennej, gdzie y jest parametrem. Podobnie, pochodną względem y obliczamy tak, jak pochodna funkcji jednej zmiennej, gdzie x jest parametrem.*

Uwaga 294 *Funkcja nie musi być ciągła, aby mieć pochodne cząstkowe w danym punkcie. Funkcja ciągła nie musi mieć pochodnych cząstkowych.*

Przykład 295 *1. Funkcja dana we współrzędnych biegunowych* ($x^2 + y^2 = r^2$, $\cos\phi = x/r$, $\sin\phi = y/r$) *wzorem*

$$f(r, \phi) = \begin{cases} \frac{1}{r}\sin 2\phi, & r \neq 0 \\ 0, & r = 0 \end{cases}$$

nie ma w $r = 0$ granicy, ponieważ dla $\phi = \frac{\pi}{4}$ mamy

$$\lim_{r \to 0} f\left(r, \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \sin\frac{\pi}{2} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{r} = \infty.$$

A zatem funkcja ta nie jest ciągła w $r = 0$. Policzmy pochodną cząstkową względem x. Dla $y = 0$ mamy $\phi = 0$ lub $\phi = \pi$ i stąd $\sin 2\phi = 0$. Zatem $f(x, 0) = 0$ oraz $f_x(0, 0) = 0$. Podobnie dla pochodnej po y.

2. Funkcja $f(x, y) = |y|$ jest ciągła w $\mathbb{R}^2$. $f_x(1, 0) = 0$, natomiast pochodna cząstkowa względem y nie istnieje w tym punkcie.

Uwaga 296 *W tym wykładzie nie będziemy mówić o* różniczkowalności *funkcji dwóch zmiennych. Jest to zagadnienie bardziej ogólne od pochodnych cząstkowych i podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej – różniczkowalność wymaga ciągłości.*

Twierdzenie 297 *Pochodne cząstkowe względem pierwszej zmiennej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji oblicza się następująco:*

$$\frac{\partial(f \pm g)}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \pm \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0),$$
$$\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot g(x_0,y_0) + f(x_0,y_0)\cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0),$$
$$\frac{\partial(f/g)}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot g(x_0,y_0) - f(x_0,y_0)\cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)}{g^2(x_0,y_0)}.$$

Podobnie oblicza się pochodne cząstkowe względem drugiej zmiennej.

Definicja 298 *Jeżeli funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w każdym punkcie zbioru otwartego $D \subseteq \mathbb{R}^2$, to funkcje*

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad \text{oraz} \qquad (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),$$

gdzie $(x,y) \in D$, nazywamy pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu *funkcji f na zbiorze D i oznaczamy odpowiednio $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ lub f_x, f_y, lub f'_x, f'_y.*

Przykład 299 *1.* $f(x,y) = x^2y^3 - x\sin y$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 - \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 - x\cos y.$$

2. $g(x,y) = x^5y^{10} - x^3\sin y + y^2e^x$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 5x^4y^{10} - 3x^2\sin y + y^2e^x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 10x^5y^9 - x^3\cos y + 2ye^x.$$

Uwaga 300 *Wszystkie wyżej wymienione pojęcia można łatwo uogólnić na przypadek* funkcji n zmiennych, *tzn. takiej, której dziedziną jest podzbiór zbioru $\mathbb{R}^n$. Rónież wykres takiej funkcji istnieje jako obiekt geometryczny, nie da się go jednak w łatwy sposób przedstawić graficznie. W szczególności istnieją pochodne cząstkowe względem poszczególnych zmiennych.*

Przykład 301 *1.* $f(x,y,z) = x^2y^3z^4 - y\sin z$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xy^3z^4, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3x^2y^2z^4 - \sin z,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 4x^2y^3z^3 - y\cos z.$$

2. $g(x,y,z) = x^5y^{10}z - z\sin y + y^2e^z$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = 5x^4y^{10}z, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = 10x^5y^9z - z\cos y + 2ye^z,$$
$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = x^5y^{10} - \sin y + y^2e^z.$$

Definicja 302 *Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu pochodnych cząstkowych* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *oraz* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *nazywamy* pochodnymi drugiego rzędu funkcji f. *Oznaczamy*

$$\begin{aligned} f_{xx} &= f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \\ f_{xy} &= f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \\ f_{yx} &= f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \\ f_{yy} &= f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Podobnie (jako pochodne cząstkowe pochodnych cząstkowych) definiujemy pochodne cząstkowe drugiego rzędu w punkcie.

Przykład 303 *1.* $f(x,y) = x^2y^3 - x\sin y$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^3 - \sin y) = 2y^3 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - x\cos y) = 6xy^2 - \cos y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3 - \sin y) = 6xy^2 - \cos y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - x\cos y) = 6x^2y + x\sin y \end{aligned}$$

2. $g(x,y) = x^5y^{10} - x^3\sin y + y^2e^x$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(5x^4y^{10} - 3x^2\sin y + y^2e^x) \\ &= 20x^3y^{10} - 6x\sin y + y^2e^x \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(10x^5y^9 - x^3\cos y + 2ye^x) \\ &= 50x^4y^9 - 3x^2\cos y + 2ye^x \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(5x^4y^{10} - 3x^2\sin y + y^2e^x) \\ &= 50x^4y^9 - 3x^2\cos y + 2ye^x \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(10x^5y^9 - x^3\cos y + 2ye^x) \\ &= 90x^5y^8 + x^3\sin y + 2e^x \end{aligned}$$

Definicja 304 *Pochodne cząstkowe drugiego rzędu względem co najmniej dwóch różnych zmiennych (tzn. względem zarówno x jak i y w przypadku funkcji dwóch zmiennych) nazywamy* pochodnymi cząstkowymi mieszanymi. *Pochodne cząstkowe drugiego rzędu względem jednej zmiennej nazywamy* pochodnymi cząstkowymi czystymi.

Twierdzenie 305 ***(Schwarz)*** *Niech funkcja f będzie zdefiniowana na obszarze M zawierającym punkt (x_0, y_0). Jeśli funkcje f_{xy} oraz f_{yx} są ciągłe w (x_0, y_0) i istnieją w pewnym otoczeniu tego punktu, wówczas*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Przykład 306 *Równość pochodnych mieszanych widać na przykładzie 303. Trzeba pamiętać, że pochodne drugiego rzędu muszą być ciągłe.*

Przykład 307 *Funkcja*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & dla\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & dla\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nie spełnia założeń twierdzenia Schwarza.

Ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych

Definicja 308 1. *Funkcja dwóch zmiennych f ma w punkcie (x_0, y_0)* minimum lokalne*, jeżeli istnieje otoczenie $O(x_0, y_0)$ takie, że dla dowolnego $(x, y) \in O(x_0, y_0)$ zachodzi*

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y).$$

2. *Funkcja dwóch zmiennych f ma w punkcie (x_0, y_0)* minimum lokalne właściwe*, jeżeli istnieje sąsiedztwo $S(x_0, y_0)$ takie, że dla dowolnego $(x, y) \in S(x_0, y_0)$ zachodzi*

$$f(x_0, y_0) < f(x, y).$$

3. *Funkcja dwóch zmiennych f ma w punkcie (x_0, y_0)* maksimum lokalne*, jeżeli istnieje otoczenie $O(x_0, y_0)$ takie, że dla dowolnego $(x, y) \in O(x_0, y_0)$ zachodzi*

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y).$$

4. *Funkcja dwóch zmiennych f ma w punkcie (x_0, y_0)* maksimum lokalne właściwe*, jeżeli istnieje sąsiedztwo $S(x_0, y_0)$ takie, że dla dowolnego $(x, y) \in S(x_0, y_0)$ zachodzi*

$$f(x_0, y_0) > f(x, y).$$

5. *Minima i maksima lokalne nazywamy* ekstremami lokalnymi.

Twierdzenie 309 ***(Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego)*** *Jeżeli funkcja dwóch zmiennych f ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum i ma w tym punkcie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu, to*

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Uwaga 310 *Wniosek: Funkcja może mieć ekstrema tylko w punktach krytycznych, tzn, takich, w których wszystkie jej pochodne pierwszego rzędu są równe zero, albo w punktach, w których choć jedna z nich nie istnieje.*

Definicja 311 *Punkt, w którym wszystkie pochodne cząstkowe pewnej funkcji wielu zmiennych zerują się, nazywamy* punktem stacjonarnym.

Twierdzenie 312 ***(Warunek dostateczny istnienia ekstremum lokalnego)***

1. *Jeżeli funkcja dwóch zmiennych f ma w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu, punkt (x_0, y_0) jest punktem stacjonarnym oraz*

$$W(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot f''_{yx}(x_0,y_0) > 0,$$

to f ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalne. Jeśli $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, jest to minimum lokalne, jeśli $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, jest to maksimum lokalne.

2. *Jeśli $W(x_0, y_0) < 0$, to funkcja f nie ma w (x_0, y_0) ekstremum lokalnego.*

Uwaga 313 *Ze wzgleędu na ciągłość drugich pochodnych mamy zgodnie z twierdzeniem Schwarza:*

$$W(x_0,y_0) = f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - \left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2$$

Uwaga 314 *Jeśli $W(x_0, y_0) = 0$, to powyższe kryterium nie rozstrzyga, czy funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalne.*

Przykład 315

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y,$$
$$f'_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15, \quad f'_y(x,y) = 6xy - 12.$$

Poszukajmy punktów stacjonarnych:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2+3y^2-15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \overset{y\neq 0}{\iff} \begin{cases} x = \frac{2}{y} \\ \frac{2^2}{y^2} + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{4}{y^2} + y^2 - 5 = 0 \iff y^4 - 5y^2 + 4 = 0 \iff (y^2-1)(y^2-4) = 0$$
$$\iff (y-1)(y+1)(y-2)(y+2) = 0 \iff y = 1 \lor y = -1 \lor y = 2 \lor y = -2$$

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \lor \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \lor \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \lor \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

A zatem są cztery punkty stacjonarne: $(1, 2)$, $(-1, -2)$, $(2, 1)$, $(-2, -1)$. *Pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji f wynoszą*

$$f''_{xx}(x,y) = 6x, \quad f''_{xy}(x,y) = 6y, \quad f''_{yx}(x,y) = 6y, \quad f''_{yy}(x,y) = 6x.$$

Sprawdźmy znak wyznacznika $W(x_0, y_0)$ dla punktów stacjonarnych:

$$W(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36(x^2 - y^2),$$

stąd

$$W(1,2) < 0, \qquad W(-1,-2) < 0, \quad W(2,1) > 0, \quad W(-2,-1) > 0.$$

Zatem funkcja f ma w punktach $(2, 1)$ i $(-2, -1)$ ekstrema lokalne. Ponieważ

$$f''_{xx}(2,1) = 12 > 0, \quad f''_{xx}(-2,-1) = -12 < 0,$$

czyli funkcja f ma minimum lokalne w punkcie $(2, 1)$ ($f_{min}(2, 1) = 8 + 6 - 30 - 12 = -28$) oraz maksimum lokalne w punkcie $(-2, -1)$ ($f_{max}(-2, -1) = -8 - 6 + 30 + 12 = 28$).

Liczby zespolone

Definicja 316 Liczbą zespoloną *nazywamy uporządkowaną parę liczb rzeczywistych* (x, y)*; oznaczamy ją jedna literą, przeważnie* z *lub* w*. Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy przez* $\mathbb{C}$ *:*

$$\mathbb{C} = \{z(x, y) : \, x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Suma *liczb zespolonych* $z_1 = (x_1, y_1)$*,* $z_2 = (x_2, y_2)$ *dana jest wzorem*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

a ich iloczyn *wzorem*

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Wynika stąd, że liczby postaci $(x, 0)$ zachowują się jak liczby rzeczywiste, moża je też tak traktować. Zamiast $(x, 0)$ piszemy x. Liczby postaci $(0, y)$ nazywamy liczbami *urojonymi*, w szczególności liczbę $(0, 1) = i$ nazywamy *jednostką urojoną*. Zachodzi

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1, \qquad (0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1) = bi$$

oraz

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi.$$

Mamy stąd

Twierdzenie 317 *Każdą liczbę zespoloną można przedstawić jako sumę liczby rzeczywistej i urojonej:*

$$z = x + iy.$$

Jest to *postać algebraiczna* liczby zespolonej.

Definicja 318 x *nazywamy* częścią rzeczywistą*, a* y częścią urojoną *liczby zespolonej* $z = x + iy$*. Oznaczamy*

$$x = \Re(z), \; y = \Im(z) \qquad \textit{lub} \qquad x = Re(z), \; y = Im(z).$$

Uwaga 319 *Część urojona liczby zespolonej jest liczbą rzeczywistą. Jest to tylko współczynnik stojący przy jednostce urojonej, a nie całe wyrażenie* iy*.*

Przykład 320 *Dla* $u = 3 + 4i$ *oraz* $v = 2 - i$ *mamy*

$$u + v = 3 + 2 + (4 - 1)i = 5 + 3i, \qquad v + u = 2 + 3 + (-1 + 4)i = 5 + 3i = u + v$$
$$uv = (3 + 4i)(2 - i) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot (-i) + 4i \cdot 2 - 4i^2 = 6 - 3i + 8i - 4 \cdot (-1) = 10 + 5i,$$
$$vu = (2 - i)(3 + 4i) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4i - 3i - 4i^2 = 10 + 5i = uv$$
$$\Re(u) = 3, \qquad \Im(u) = 4, \qquad \Re(v) = 2, \qquad \Im(v) = -1.$$

Przykład 321 *Mnożenie liczb zespolonych jest łączne:*

$$\begin{aligned}[(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)](x_3+iy_3) &= [(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)](x_3+iy_3)\\ &= x_1x_2x_3-y_1y_2x_3-x_1y_2y_3-y_1x_2y_3\\ &+ i(x_1x_2y_3-y_1y_2y_3-x_1y_2x_3-y_1x_2x_3)\\ &= x_1x_2x_3-x_1y_2y_3-y_1x_2y_{-}y_1y_2x_33\\ &+ i(x_1x_2y_3-x_1y_2x_3-y_1x_2x_3-y_1y_2y_3)\\ &= (x_1+iy_1)[(x_2x_3-y_2y_3)+i(x_2y_3+y_2x_3)]\\ &= (x_1+iy_1)[(x_2+iy_2)(x_3+iy_3)]\end{aligned}$$

Definicja 322 Liczbą przeciwną *do danej liczby zespolonej $z = x + iy$ nazywamy liczbę*

$$-z = -x - iy,$$

liczbą odwrotną *do danej liczby zespolonej $z = x + iy \neq 0$ nazywamy liczbę*

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Przykład 323 *Zachodzi*

$$\begin{aligned} z\cdot\frac{1}{z} &= (x+iy)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right)\\ &= x\cdot\frac{x}{x^2+y^2} - ix\cdot\frac{y}{x^2+y^2} + iy\cdot\frac{x}{x^2+y^2} - i^2y\cdot\frac{y}{x^2+y^2}\\ &= \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + i\cdot\frac{-xy+yx}{x^2+y^2} = 1\end{aligned}$$

Mamy stąd dla $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$\begin{aligned} &z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1-x_2) + i(y_1-y_2),\\ &\frac{z_1}{z_2} = z_1\cdot\frac{1}{z_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+i(-x_1y_2+x_2y_1)}{x_2^2+y_2^2}, \quad z_2 \neq 0.\end{aligned}$$

Definicja 324 Sprzężeniem *liczby zespolonej $z = x + iy$ nazywamy liczbę zespoloną*

$$\bar{z} = x - iy,$$

modułem *– liczbę rzeczywistą*

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\cdot\bar{z}},$$

natomiast argumentem *dla $z \neq 0$ nazywamy każdą liczbę $\phi \in \mathbb{R}$ spełniającą układ równań*

$$\begin{cases}\cos\phi = \frac{x}{|z|},\\ \sin\phi = \frac{y}{|z|}.\end{cases}$$

Przyjmujemy, że argumentem liczby $z = 0$ jest każda liczba rzeczywista $\phi \in \mathbb{R}$. Argumentem głównym *liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy argument tej liczby spełniający nierówności $0 \leq \phi < 2\pi$ (lub $-\pi < \phi \leq \pi$).*

Uwaga 325 *Przy dzieleniu liczb zespolonych korzystamy z przekształcenia*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Przykład 326 *Dla* $u = 3 + 4i$ *oraz* $v = 2 - i$ *mamy*

$$\begin{aligned}
&u - v = 3 - 2 + (4 + 1)i = 1 + 5i, \qquad v - u = 2 - 3 + (-1 - 4)i = -1 - 5i = -(u - v),\\
&\frac{u}{v} = \frac{3 + 4i}{2 - i} = \frac{(3 + 4i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{6 - 4 + (3 + 8)i}{4 + 1} = \frac{2 + 11i}{5},\\
&\frac{v}{u} = \frac{2 - i}{3 + 4i} = \frac{(2 - i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{6 - 4 - (3 + 8)i}{9 + 16} = \frac{2 - 11i}{25}.
\end{aligned}$$

Twierdzenie 327 *Własności sprężenia liczby zespolonej:*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,
2. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$,
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, *dla* $z_2 \neq 0$,
5. $z + \bar{z} = 2\Re(z)$,
6. $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$,
7. $\overline{(\bar{z})} = z$,
8. $\Re(z) = \Re(\bar{z})$,
9. $\Im(z) = -\Im(\bar{z})$.

Przykład 328 *Dla* $u = 3 + 4i$ *oraz* $v = 2 - i$ *mamy*

$$\begin{aligned}
&\bar{u} = 3 - 4i, \qquad \bar{v} = 2 + i,\\
&u - v = 1 + 5i, \qquad \bar{u} - \bar{v} = 3 - 2 - (4 + 1)i = 1 - 5i = \overline{u - v},\\
&\frac{u}{v} = \frac{2 + 11i}{5},\\
&\frac{\bar{u}}{\bar{v}} = \frac{3 - 4i}{2 + i} = \frac{(3 - 4i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{6 - 4 - (3 + 8)i}{4 + 1} = \frac{2 - 11i}{5} = \frac{\overline{2 + 11i}}{5}.
\end{aligned}$$

Twierdzenie 329 *Własności modułu liczby zespolonej:*

1. $|z| = |\bar{z}| = |-z|$,
2. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$,
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ *dla* $z_2 \neq 0$,
5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(nierówność trójkąta),*

6. $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|$ *(odwrotna nierówność trójkąta),*

7. $|\Re(z)| \le |z|$, $|\Im(z)| \le |z|$,

8. $|\Re(z_1 z_2)| \le |z_1||z_2|$.

Przykład 330 1. *Własność 2 została wykorzystana w Przykładzie 326 przy rozszerzaniu mianownika.*

2. *Dla* $u = 3 + 4i$ *oraz* $v = 2 - i$ *mamy*

$$|u| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \qquad |v| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$
$$\left|\frac{u}{v}\right| = \frac{\sqrt{2^2 + 11^2}}{5} = \frac{\sqrt{125}}{5} = \sqrt{5} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{|u|}{|v|}$$

Liczbę zespoloną $z = x + iy$ przedstawia się na płaszczyźnie w postaci punktu o współrzędnych (x, y) lub w postaci wektora o początku w punkcie $(0, 0)$ i końcu w punkcie (x, y). W tej interpretacji zbiór wszystkich liczb zespolonych nazywamy płaszczyzną zespoloną. Moduł liczby zespolonej z jest odległością punktu z od początku układu współrzędnych, natomiast argument główny – kątem, jaki wektor odpowiadający liczbie z tworzy z osią OX. Moduł różnicy liczb zespolonych z_1 i z_2 jest długością odcinka łączącego punkty z_1 i z_2 płaszczyzny zespolonej.

Twierdzenie 331 *Każdą liczbę zespoloną* z *można przedstawić w postaci*

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi),$$

gdzie $r \ge 0$ *jest jej modułem, a* ϕ *– jednym z argumentów.*

Ten sposób przedstawiania liczb zespolonych nazywamy *postacią trygonometryczną.*

Przykład 332 1. $-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = 1(\cos(3\pi) + i\sin(3\pi))$,

2. $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Twierdzenie 333 *Dla liczb zespolonych* $z_1 = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$ *mamy*

1. $\bar{z} = r(\cos\phi - i\sin\phi) = r[\cos(-\phi) + i\sin(-\phi)]$,

2. $-z = r[\cos(\phi + \pi) + i\sin(\phi + \pi)]$,

3. $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\phi - i\sin\phi)$ *dla* $z \ne 0$,

4. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)]$,

5. $z^k = r^k[\cos(k\phi) + i\sin(k\phi)]$ *(*wzór de Moivre'a*),*

6. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2)] \qquad$ *dla* $z_2 \ne 0$.

Przykład 334 *1.*

$$\frac{3i}{1+i} = \frac{3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})}{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})} = \frac{3}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2}(1+i)$$

2.

$$\left(\sqrt{3} - i\right)^{60} = \left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right]^{60} = 2^{60}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^{60}$$
$$= 2^{60}\left[\cos(-10\pi) + i\sin(-10\pi)\right] = 2^{60}(\cos 0 + i\sin 0) = 2^{60}\cdot 1 = 2^{60}$$

3. Korzystając ze wzoru de Moivre'a można w łatwy sposób obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych wielokrotności kątów:

$$\begin{aligned}\cos(5\phi) + i\sin(5\phi) &= (\cos\phi + i\sin\phi)^5\\ &= \cos^5\phi + 5\cos^4\phi\cdot i\sin\phi + 10\cos^3\phi(i\sin\phi)^2\\ &\quad + 10\cos^2\phi(i\sin\phi)^3 + 5\cos\phi(i\sin\phi)^4 + (i\sin\phi)^5\\ &= \cos^5\phi - 10\cos^3\phi\sin^2\phi + 5\cos\phi\sin^4\phi\\ &\quad + i[5\cos^4\phi\sin\phi - 10\cos^2\phi\sin^3\phi + \sin^5\phi].\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}\cos(5\phi) &= \cos^5\phi - 10\cos^3\phi\sin^2\phi + 5\cos\phi\sin^4\phi,\\ \sin(5\phi) &= 5\cos^4\phi\sin\phi - 10\cos^2\phi\sin^3\phi + \sin^5\phi.\end{aligned}$$

Definicja 335 *Dla $\phi \in \mathbb{R}$ liczbę zespoloną $\cos\phi + i\sin\phi$ oznaczamy przez $e^{i\phi}$.*

Zatem każdą liczbę zespoloną z można zapisać jako

$$z = re^{i\phi},$$

gdzie $r \geq 0$ jest jej modułem, a $\phi \in \mathbb{R}$ – argumentem.

Definicja 336 *$re^{i\phi}$ nazywamy* postacią wykładniczą *liczby zesopolonej.*

Upraszcza to wzory z Twierdzenia 333.

Twierdzenie 337 *Niech $z = re^{i\phi}$, $z_1 = r_1e^{i\phi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\phi_2}$ będą liczbami zespolonymi, a k niech będzie liczbą całkowitą. Wówczas:*

1. $\bar{z} = re^{-i\phi}$,
2. $-z = re^{i(\phi+\pi)}$,
3. $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\phi}$ *dla* $z \neq 0$,
4. $z^k = r^ke^{ik\phi}$,

5. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\phi_1+\phi_2)}$,

6. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1-\phi_2)}$.

Definicja 338 Pierwiatkiem stopnia *n z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w spełniającą równość*

$$w^n = z.$$

Zbiór pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej z oznaczamy przez $\sqrt[n]{z}$.

Uwaga 339 *Pierwiastkowanie w liczbach zespolonych jest niejednoznaczne, nie wolno go zatem używać do oblicze*

Przykład 340 *1.*

$$\sqrt[2]{4} = 2 \quad w\ \mathbb{R}, \qquad \sqrt[2]{4} = \{-2, 2\} \quad w\ \mathbb{C}.$$

2. $\sqrt{-7+24i}$:

$$(a+bi)^2 = -7+24i$$
$$a^2 - b^2 + 2abi = -7+24i$$
$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= -7 \\ 2ab &= 24 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a &= \frac{12}{b} \\ \frac{144}{b^2} - b^2 &= -7 \end{cases}, \qquad b \neq 0$$
$$-b^4 + 7b^2 + 144 = 0$$
$$\Delta = 7^2 + 4 \cdot 144 = 49 + 576 = 625 = 25^2$$
$$b^2 = \frac{-7+25}{-2} = -9 \vee b^2 = \frac{-7-25}{-2} = 16$$
$$\begin{cases} b &= \pm 4 \\ a &= \pm 3 \end{cases}$$
$$\sqrt{-7+24i} = \{3+4i, -3-4i\}$$

3. $\sqrt{-7+24i}$:

$$-7+24i = \sqrt{7^2+24^2} e^{i \arccos \frac{-7}{\sqrt{7^2+24^2}}} = 25 e^{i \arccos \frac{-7}{25}}$$
$$\left(re^{i\phi}\right)^2 = 25 e^{i \arccos \frac{-7}{25}}$$
$$\begin{cases} r^2 &= 25 \\ 2\phi &= \arccos \frac{-7}{25} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\begin{cases} r &= 5 \\ \phi &= \frac{1}{2} \arccos \frac{-7}{25} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Wyznaczamy cosinus i sinus kąta ϕ, *wiedząc, że* $\cos 2\phi = \frac{-7}{25}$ *oraz* $\sin 2\phi = \frac{24}{25}$:

$$\begin{cases} 2\sin\phi\cos\phi &= \frac{24}{25} \\ \cos^2\phi - \sin^2\phi &= \frac{-7}{25} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\phi &= \frac{3}{5} \\ \sin\phi &= \frac{4}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} \cos\phi &= \frac{-3}{5} \\ \sin\phi &= \frac{-4}{5} \end{cases}.$$

(Zwróćmy uwagę, że do rozwiązania służył praktycznie ten sam układ równań, co przy poprzedniej metodzie.) Stąd

$$\sqrt{-7+24i} = \{3+4i, -3-4i\}.$$

Uwaga 341 *Przy pierwiastkowaniu liczb zespolonych, których argument może być obliczony w sposób jawny, najprościej jest skorzystać z postaci trygonometrycznej lub wykładniczej.*

Twierdzenie 342 *Każda liczba zespolona $z = re^{i\phi}$, $r > 0$, $\phi \in \mathbb{R}$, ma dokładnie n pierwiastków stopnia n:*

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\cdot\frac{\phi+2k\pi}{n}},\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}.$$

Dowód. Niech $w = \rho\, e^{i\psi}$ oznacza n–ty pierwiastek z z, tzn.

$$w^n = z.$$

Równość modułów i argumentów tych liczb może być zapisana w układzie równań

$$\begin{cases} \rho^n &= r \\ n\psi &= \phi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

stąd

$$\begin{cases} \rho &= \sqrt[n]{r} \\ \psi &= \frac{\phi+2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

przy czym róne wartości argumentu mamy dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$. □

Uwaga 343 *Zbiór pierwiastków nie zależy od wyboru argumentu liczby zespolonej.*

Przykład 344

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{\pi i}} = \left\{ e^{i\cdot\frac{\pi+2k\pi}{4}},\ k = 0,1,2,3 \right\} = \left\{ e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{3\pi i}{4}}, e^{\frac{5\pi i}{4}}, e^{\frac{7\pi i}{4}} \right\}$$

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{3\pi i}} = \left\{ e^{i\cdot\frac{3\pi+2k\pi}{4}},\ k = 0,1,2,3 \right\} = \left\{ e^{i\frac{3\pi i}{4}}, e^{\frac{5\pi i}{4}}, e^{\frac{7\pi i}{4}}, e^{\frac{9\pi i}{4}} \right\}$$

$$= \left\{ e^{\frac{3\pi i}{4}}, e^{\frac{5\pi i}{4}}, e^{\frac{7\pi i}{4}}, e^{\frac{\pi i}{4}} \right\}$$

Przykład 345 *Rozwiąż równania:*

1. $z^2 - 2z + 4 = 0$
   $\Delta = 2^2 - 4\cdot 4 = -12$, $z_1 = \frac{2+i\sqrt{12}}{2\cdot 1} = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \frac{2-i\sqrt{12}}{2\cdot 1} = 1 - i\sqrt{3}$
2. $z^2 - iz + 2 = 0$
   $\Delta = i^2 - 4\cdot 2 = -1 - 8 = -9$, $z_1 = \frac{i+i\sqrt{9}}{2} = 2i$, $z_2 = \frac{i-i\sqrt{9}}{2} = -i$
3. $z^2 - 3z + 3 - i = 0$
   $\Delta = 3^2 - 4(3+i) = -3-4i$, $\sqrt{\Delta} = \pm(1-2i)$, $z_1 = \frac{3+1-2i}{2} = 2-i$, $z_2 = \frac{3-1+2i}{2} = 1+i$

Macierze

Definicja 346 *Tablice postaci*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazywamy macierzami *rozmiaru (wymiaru)* $m \times n$*. Macierze wymiaru* $m \times 1$ *oraz* $1 \times n$ *nazywamy* wektorami.

Definicja 347 *Niech dana będzie macierz* (a_{jk}) *o wymiarze* $n \times m$ *oraz wektor* x *o wymiarze* m*.* n*–wymiarowy wektor* y*, którego współrzędne dane są wzorem*

$$y_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} x_k$$

nazywamy iloczynem macierzy A *i wektora* x *i piszemy* $y = Ax$*.*

Uwaga 348 *Mnożenie macierzy przez wektor nie jest przemienne. „*$x \cdot A$*" w ogólnym przypadku nie istnieje.*

Uwaga 349 *Jeżeli zapiszemy macierz w postaci tablicy liczb, a wektor jako kolumnę współrzędnych, to wyrażenie* $y = Ax$ *przybierze postać:*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Przykład 350

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 3 \\ 10 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \\ 68 \end{pmatrix}$$

Dla ułatwienia obliczeń stosuje się czasem zapis

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & & & 2 \\ & & & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 5 & 6 & 32 \\ 7 & 8 & 9 & 50 \\ 10 & 11 & 12 & 68 \end{array}.$$

Definicja 351 *1. Macierz (a_{jk}) o wymiarze $n \times n$ nazywamy* kwadratową. *Liczbę n nazywamy wówczas* stopniem macierzy.

2. Macierz kwadratową, taką że $a_{jk} = a_{kj}$ dla każdej pary indeksów k, j nazywamy symetryczną.

3. Macierz kwadratową, taką że $a_{jk} = -a_{kj}$ dla każdej pary indeksów k, j nazywamy skośnosymetryczną.

4. Macierz kwadratową, taką że $a_{jk} = 0$ dla $j \neq k$, nazywamy diagonalną.

5. Macierz kwadratową, taką że $a_{jk} = 0$ dla $j < k$ lub dla $j > k$ nazywamy trójkątną.

Uwaga 352 *W macierzy skośnosymetrycznej zachodzi $a_{kk} = -a_{kk} = 0$.*

Przykład 353 *1. Macierz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

jest symetryczna.

2. Macierz

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \\ -3 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

jest skośnosymetryczna.

3. Macierz

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

gdzie w miejscu $*$ jest dowolna liczba, jest diagonalna.

4. Macierze

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \quad \textit{oraz} \quad \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

są trójkątne.

Wszystkie te macierze są kwadratowe.

Definicja 354 *1.* Sumą macierzy *$A = (a_{jk})$ i $B = (b_{jk})$, obu o wymiarach $n \times m$, nazywamy macierz $C = (c_{jk})$ o wymiarze $n \times m$ taką, że $c_{jk} = a_{jk} + b_{jk}$. Piszemy $C = A + B$.*

2. Różnicą macierzy *$A = (a_{jk})$ i $B = (b_{jk})$, obu o wymiarach $n \times m$, nazywamy macierz $C = (c_{jk})$ o wymiarze $n \times m$ taką, że $c_{jk} = a_{jk} - b_{jk}$. Piszemy $C = A + B$.*

3. Niech $A = (a_{jk})$ będzie macierzą o wymiarze $n \times n$. Macierzą transponowaną $A^T = (a'_{jk})$ nazywamy macierz o wymiarze $m \times n$ taką, że $a'_{jk} = a_{kj}$. Piszemy $(a_{jk})^T = (a_{kj})$.

4. *Iloczynem macierzy* $A = (a_{jk})$ *o wymiarze* $n \times m$ *przez liczbę* α *nazywamy macierz* $\alpha \cdot A = (b_{jk})$ *o wymiarze* $n \times m$ *taką, że* $b_{kj} = \alpha a_{jk}$*. Piszemy* $\alpha(a_{jk}) = (\alpha \cdot a_{jk})$*.*

5. *Iloczynem macierzy* $A = (a_{ij})$ *o wymiarze* $n \times m$ *przez macierz* $B = (a_{jk})$ *o wymiarze* $m \times l$ *nazywamy macierz* $A \cdot B = (c_{ik})$ *o wymiarze* $n \times l$ *taką, że* $c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$*.*

Przykład 355 *1.*

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+7 & 2+8 & 3+9 \\ 4+10 & 5+11 & 6+12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-7 & 2-8 & 3-9 \\ 4-10 & 5-11 & 6-12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

4.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 5 & 2\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 5 & 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 6 \\ 7\cdot 1 + 8\cdot 3 + 9\cdot 5 & 7\cdot 2 + 8\cdot 4 + 9\cdot 6 \\ 10\cdot 1 + 11\cdot 3 + 12\cdot 5 & 10\cdot 2 + 11\cdot 4 + 12\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \\ 76 & 100 \\ 103 & 136 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dla ułatwienia obliczeń stosuje się również zapis

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & 2 \\ & & & 3 & 4 \\ & & & 5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 22 & 28 \\ 4 & 5 & 6 & 49 & 64 \\ 7 & 8 & 9 & 76 & 100 \\ 10 & 11 & 12 & 103 & 136 \end{array}.$$

Uwaga 356 *Mnożenie macierzy nie jest przemienne. Nie dość, że w ogólnym przypadku iloczyny AB i BA nie są sobie równe. Zazwyczaj BA w ogóle nie istnieje, bo wymiary macierzy się nie zgadzają. W ostatnim przykładzie iloczyn macierzy w odwrotnej kolejności nie istnieje.*

Twierdzenie 357 *Dla macierzy A i B o rozmiarach odpowiednio $k\times m$ oraz $m\times n$ zachodzi $(AB)^T = B^T A^T$.*

Przykład 358

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 3 & 1\cdot 4 + 3\cdot 5 + 5\cdot 6 & 1\cdot 7 + 3\cdot 8 + 5\cdot 9 & 1\cdot 10 + 3\cdot 11 + 5\cdot 12 \\ 2\cdot 1 + 4\cdot 2 + 6\cdot 3 & 2\cdot 4 + 4\cdot 5 + 6\cdot 6 & 2\cdot 7 + 4\cdot 8 + 6\cdot 9 & 2\cdot 10 + 4\cdot 11 + 6\cdot 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 22 & 49 & 76 & 103 \\ 28 & 64 & 100 & 136 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \\ 76 & 100 \\ 103 & 136 \end{pmatrix}^T = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \right]^T$$

Wyznaczniki i ich zastosowania

Obliczanie wyznaczników

Każdej macierzy kwadratowej

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

przyporządkowujemy liczbę zwaną *wyznacznikiem* i oznaczaną przez $|A|$, $\det A$ lub

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Mówimy, że wyznacznik jest *stopnia n*. Wyznacznik jest liczbą określoną jednoznacznie przez tablicę kwadratową. Używamy też słowa *wyznacznik* w odniesieniu do samej tablicy.

1. Dla $n = 1$ wyznacznik dany jest wzorem

   $$|a| = a.$$

   Uwaga: oznaczenia nie wolno mylić z wartością bezwzględną.

2. Dla $n = 2$ wyznacznik obliczamy według wzoru:

   $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

3. Wyznacznik stopnia trzeciego dany jest wzorem

   $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.$$

   Obliczamy go stosują c tzw. *regułę Sarrusa*: poniżej wyznacznika dopisujemy jego pierwszy i drugi wiersz, po czym tworzymy iloczyny liczba znajdujących sie na ukośnych prostych, ze znakiem *plus* dla nachylonych w lewo i ze znakiem *minus* dla nachylonych w prawo.

Definicja 359 *1.* Minorem (podwyznacznikiem) *danej macierzy (danego wyznacznika) nazywamy każdy wyznacznik określony tablicą kwadratową powstałą z danej macierzy (wyznacznika) przez skreślenie pewnej liczby wierszy oraz kolumn.*

2. Minorem odpowiadającym elementowi a_{jk} *danej macierzy kwadratowej A (danego wyznacznika) nazywamy wyznacznik, który powstaje poprzez skreślenie j-tego wiersza i k-tej kolumny. Oznaczamy go M_{jk}.*

3. Dopełnieniem algebraicznym A_{jk} elementu a_{jk} *nazywamy liczbę równą iloczynowi minora M_{jk} przez $(-1)^{j+k}$:*

$$A_{jk} = (-1)^{j+k} \cdot M_{jk}.$$

Uwaga 360 *Układ znaków przy minorach (tzn. liczb $(-1)^{j+k}$) odpowiada wzorowi szachownicy:*

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots & - & + \\ - & + & - & + & \cdots & + & - \\ + & - & + & - & \cdots & - & + \\ - & + & - & + & \cdots & + & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ - & + & - & + & \cdots & + & - \\ + & - & + & - & \cdots & - & + \end{pmatrix} \quad \textit{lub} \quad \begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots & + & - \\ - & + & - & + & \cdots & - & + \\ + & - & + & - & \cdots & + & - \\ - & + & - & + & \cdots & - & + \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ + & - & + & - & \cdots & + & - \\ - & + & - & + & \cdots & - & + \end{pmatrix}$$

Przykład 361 *Minorami wyznacznika*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

są np.

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad |a_{12}|, \quad |a_{24}|, \quad |a_{31}|, \quad |a_{44}|.$$

Pierwszy z nich jest minorem M_{11} odpowiadającym elementowi a_{11}, a drugi minorem M_{23} odpowiadającym elementowi a_{23}. Dopełnienia algebraiczne elementów a_{11} i a_{23} równe są

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

oraz

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Definicja 362 Wyznacznik stopnia n *($n \geq 2$) jest to suma iloczynów elementów dowolnego wiersza lub kolumny macierzy przez ich dopełnienia algebraiczne.*

Przykład 363 *1.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$+ a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$= a_1 \cdot (b_2c_3 - b_3c_2) - a_2 \cdot (b_1c_3 - b_3c_1) + a_3 \cdot (b_1c_2 - b_2c_1)$$
$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

Jest to ten sam wzór, który podaliśmy powyżej.

3.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot |d| - c \cdot |b| = ad - cb.$$

Jest to ten sam wzór, który podaliśmy powyżej. Uwaga: *pionowe kreski oznaczają wyznacznik, a nie wartość bezwzględną. Aby uniknąć nieporozumień, można stosować zapis:*

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot det(d) - c \cdot det(b) = ad - cb.$$

Twierdzenie 364 *Wartość wyznacznika nie zależy od wyboru wiersza/kolumny.*

Przykład 365

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 8 \cdot 6) - 4 \cdot (2 \cdot 9 - 8 \cdot 3) + 7 \cdot (2 \cdot 6 - 5 \cdot 3)$$
$$= (45 - 48) - 4 \cdot (18 - 24) + 7 \cdot (12 - 15) = -3 - 4 \cdot (-6) + 7 \cdot (-3)$$
$$= -3 + 24 - 21 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= -2 \cdot (4 \cdot 9 - 7 \cdot 6) + 5 \cdot (1 \cdot 9 - 7 \cdot 3) - 8 \cdot (1 \cdot 6 - 4 \cdot 3)$$
$$= -2 \cdot (36 - 42) + 5 \cdot (9 - 21) - 8 \cdot (6 - 12)$$
$$= -2 \cdot (-6) + 5 \cdot (-12) - 8 \cdot (-6) = 12 - 60 + 48 = 0$$

Twierdzenie 366 *1.* $detA^T = detA$.

2. *Przestawienie dwóch dowolnych wierszy lub kolumn zmienia wartość wyznacznika na przeciwną.*

3. *Dodanie λ–krotności pewnego wiersza/pewnej kolumny do innego wiersza/innej kolumny nie zmienia wartości wyznacznika.*

4. *Jeżeli wszystkie elementy pewnego wiersza lub kolumny wyznacznika pomnożymy przez pewną liczbę (operacja elementarna ZI lub SI), to wartość wyznacznika zostanie pomnożona przez tę liczbe (uwaga: dotyczy to również liczby* 0*).*

5. *Jeżeli wyznacznik ma dwa wiersze lub dwie kolumny identyczne, to jego wartość jest równa zero.*

6. *Jeżeli wyznacznik ma jakiś wiersz lub jakąś kolumnę złożoną z samych zer, to jego wartość wynosi zero.*

7. *Suma iloczynów elementów dowolnego wiersza (kolumny) wyznacznika przez dopełnienia algebraiczne elementów innego wiersza (kolumny) równa się zeru.*

Uwaga 367 *Przy obliczaniu wyznaczników stosujemy operacje elementarne w ten sposób, aby doprowadzić wyznacznik do prostszej postaci, tzn. takiej, w której w pewnym wierszu lub w pewnej kolumnie występują zera.*

Przykład 368 *Aby obliczyć wartość wyznacznika*

$$W = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 4 \\ 7 & 6 & -3 & -7 & 12 \\ -9 & -6 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & -3 & 4 \end{vmatrix},$$

odejmujemy trzykrotność pierwszego wiersza od wiersza drugiego:

$$W = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ -9 & -6 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & -3 & 4 \end{vmatrix},$$

a następnie do trzeciego wiersza dodajemy podwojony czwarty wiersz:

$$W = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -5 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & -3 & 4 \end{vmatrix},$$

po czym rozwijamy wyznacznik według elementów trzeciego wiersza:

$$W = (-1) \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & -3 & 4 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}.$$

Każdy z wyznaczników czwartego stopnia rozwijamy względem elementów drugiego wiersza i otrzymujemy:

$$W = -1 \cdot 8 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-2) \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}.$$

Wyznaczniki występujące w tym wyrażeniu są identyczne (jeśli prześledzić, jak powstały, widać, że składają się z tych samych elementów), a zatem

$$\begin{aligned} W = (8+2) \cdot & \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} \\ & = 10 \cdot [2 \cdot (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 6 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \\ & - (-2) \cdot (-2) \cdot 4 - 2 \cdot 6 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) \cdot 4] \\ & = 10 \cdot (-16 + 72 + 2 - 16 - 12 + 12) = 10 \cdot 42 = 420. \end{aligned}$$

Zastosowania wyznaczników

Objętość równoległościanu

Twierdzenie 369 *Objętość równoległościanu rozpiętego na trzech liniowo niezależnych wektorach wynosi $|detA|$ dla macierzy A utworzonej z tych wektorów. Analogicznie w przestrzeni dwuwymiarowej.*

Uwaga 370 *W przestrzeni geometrycznej $\mathbb{R}^n$ punkty często identyfikujemy z odpowiadającymi im wektorami.*

Przykład 371 *Policz powierzchnię równoległoboku rozpiętego na wektorach $x_1 = (1,0)^T$ i $x_2 = (1,1)^T$.*

Rozwiązanie.

$$P = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = |1| = 1.$$

Z drugiej strony jest to równoległobok o długości podstawy 1 i wysokości 1. Stąd jego powierzchnia wynosi $1 \cdot 1 = 1$. Oba sposoby rozwiązania dają tę samą wartość pola.

Rząd macierzy

Definicja 372 Rząd macierzy *jest równy największemu stopniowi wyjętego z niej różnego od zera minora.*

Przykład 373

1. *W przypadku macierzy* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ *mamy* $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = -3 \neq 0$, *a zatem rząd macierzy wynosi* 2.

2. *Wyznacznik macierzy* $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 6 & 4 & 4 \\ 9 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ *jest różny od zera, zatem jej rząd jest równy* 3.

Odwracanie macierzy

Definicja 374 Macierzą odwrotną A^{-1} *danej macierzy kwadratowej* A *stopnia* n *nazywamy macierz, która spełnia równości*

$$A \cdot A^{-1} = E_n, \quad A^{-1} \cdot A = E_n,$$

gdzie E_n *oznacza macierz jednostkową* $E = diag(1\,1\,\ldots 1)$ *stopnia* n.

Uwaga 375 *Jeżeli macierz kwadratowa posiada macierz odwrotną, to jest ona wyznaczona* jednoznacznie, *tzn. wystarczy żądać spełnienia jednej równości z definicji, druga z nich spełniona jest automatycznie.*

Uwaga 376 *Dla macierzy o wymiarach* $n \times k$, *gdzie* $n \neq k$, *również istnieją odpowiednie macierze* $\tilde{A}^L$ *oraz* $\tilde{A}^R$ *o wymiarach* $k \times n$ *spełniające warunek* $\tilde{A}^L \cdot A = E_k$ *oraz* $A \cdot \tilde{A}^R = E_n$ *Nazywamy je* lewostronną i prawostronną pseudoodwrotnościami macierzy A.

Definicja 377 Macierz dołączona *macierzy* A *jest to transponowana macierz dopełnień algebraicznych. Oznaczamy ją symbolem* A^D:

$$A^D = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Przykład 378 *Dopełnienia algebraiczne macierzy* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ *to*

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = +24,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -4, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = +42,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -28, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = +6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -10, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = +8,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

Zatem macierzą dołączoną jest

$$A^D = \begin{pmatrix} -36 & 42 & -10 \\ 24 & -28 & 8 \\ -4 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Twierdzenie 379 *Jeżeli macierz kwadratowa* $A = (a_{jk})$ *jest macierzą nieosobliwą, tzn.* $\det A \neq 0$, *to istnieje do niej dokładnie jedna macierz odwrotna* A^{-1}. *Jest ona równa macierzy dołączonej pomnożonej przez odwrotność wyznacznika macierzy* A.

Przykład 380 *Weźmy macierz z poprzedniego przykładu. Jej wyznacznik jest równy*

$$\det A = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} = 1\cdot(-36) + 3\cdot 24 + 7\cdot(-4) = -36 + 72 - 28 = 8 \neq 0.$$

Według twierdzenia macierzą odwrotną do A jest

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^D = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -36 & 42 & -10 \\ 24 & -28 & 8 \\ -4 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -18 & 21 & -5 \\ 12 & -14 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sprawdźmy:

$$\begin{aligned} A\cdot A^{-1} &= \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -18 & 21 & -5 \\ 12 & -14 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -18+36-14 & 21-42+21 & -5+12-7 \\ -36+48-12 & 42-56+18 & -10+16-6 \\ -72+72 & 84-84 & -20+24 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = E_3. \end{aligned}$$

Przykład 381 *Niech dana będzie macierz* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$*, taka że* $ad-bc\neq 0$*. Jej dopełnienia algebraiczne to*

$$A_{11} = d, \qquad A_{12} = -c, \qquad A_{21} = -b, \qquad A_{22} = a,$$

zatem macierzą odwrotną jest

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Sprawdźmy:

$$\begin{aligned} A\cdot A^{-1} &= \frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -cb+da \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = E_2. \end{aligned}$$

Macierz odwrotna i rozwiązywanie układów równań. Równania macierzowe

Niech dany będzie układ równań

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Można go zapisać w postaci $Ax = y$, gdzie A jest macierzą, a x i y – wektorami kolumnowymi. Formalnym rozwiązaniem takiego układu jest

$$x = A^{-1}y.$$

Twierdzenie 382 *Układ n równań liniowych z n niewiadomymi*

$$y = Ax$$

jest jednoznacznie rozwiązywalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$. *Rozwiązanie dane jest wzorem*

$$x = A^{-1}y.$$

Przykład 383 *W układzie równań*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & -18, \\ 3x_1 & & & + & x_3 & = & -7, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -9. \end{array}$$

(patrz Przykład **??***) mamy*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{oraz} \quad y = \begin{pmatrix} -18 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Wyznacznik macierzy A ma wartość $12 + 6 - 18 - 5 = -5 \neq 0$, *a macierz odwrotna jest równa*

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & +7 \\ 3 & +1 & -9 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązaniem układu równań jest

$$x = A^{-1}y = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -18 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 18+14-27 \\ 72-14-63 \\ -54-7+81 \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Definicja 384 *Równanie, w którym niewiadomą jest macierz, nazywamy* równaniem macierzowym.

Przykład 385

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad X^2 - 7X + 9E_3 = 0,$$

gdzie X oznacza macierz, to równania macierzowe.

Twierdzenie 386 *Niech A będzie macierzą nieosobliwą. Równanie*

$$A \cdot X = B$$

(gdzie B jest dowolną macierzą kwadratową tego samego stopnia, co A) ma jednoznaczne rozwiązanie

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Równanie

$$X \cdot A = B$$

(gdzie B jest dowolną macierzą kwadratową tego samego stopnia, co A) ma jednoznaczne rozwiązanie

$$X = B \cdot A^{-1}.$$

Przykład 387

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 3 \cdot 2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 16 & -4 \\ -13 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 13/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Sprawdzenie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 13/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Układy równań liniowych. Rozwiązywanie metodą Gaussa

Przykład 388 *Model Leontiefa (Wassilij Leontief 1905–1999, 1973 nagroda Nobla w dziedzinie ekonomii): Jakie warunki są konieczne do spełnienia, aby produkcja przemysłowa zaspokajała popyt?*

Uproszczony model dla trzech fabryk, z których każda produkuje jeden artykuł.

- *Produkcja roczna: Fabryka X produkuje ilość x produktu A. Fabryka Y produkuje ilość y produktu B.: Fabryka Z produkuje ilość z produktu C.*
- *Zapotrzebowanie pozaprzemysłowe: roczne zapotrzebowanie pozaprzemysłowe (konsumcja i eksport) towarów A, B i V wynosi odpowiednio a, b i c.*
- *Zapotrzebowanie przemysłowe:*

Do wyprodukowania jednostki produktu

fabryka X potrzebuje	fabryka Y potrzebuje	fabryka Z potrzebuje	
d jednostek	g jednostek	j jednostek	produktu A
e jednostek	h jednostek	k jednostek	produktu B
f jednostek	i jednostek	l jednostek	produktu C

Z tych danych łatwo obliczyć zapotrzebowanie roczne. Zachodzą zatem następujące zależności: Popyt zostaje zaspokojony, kiedy produkcja jest równa całkowitemu zapotrzebowaniu. Daje to układ równań:

$$\begin{array}{ccccccccc} x & = & dx & + & gy & + & jz & + & a \\ y & = & ex & + & hy & + & kz & + & b \\ z & = & fx & + & iy & + & lz & + & c. \end{array}$$

Przykład 389 *1.*

$$\begin{array}{rcrcrl} 5x & - & 2y & = & 1 & / \cdot 3 \\ 2x & + & 3y & = & 8 & / \cdot 2 \\ \hline 19x & & & = & 19 & / : 19 \\ x & & & = & 1 & \end{array}$$

Po podstawieniu do pierwszego równania otrzymujemy

$$\begin{array}{rcrcrl} 5 & - & 2y & = & 1 & / -5 \\ & - & 2y & = & -4 & / : (-2) \\ & & 2 & = & 2 & \end{array}$$

W ten sposób zostało pokazane, że jeśli jakaś para liczb spelnia wyjściowy układ, to są to liczby $x = 1$ i $y = 2$. Istenieje zatem co najwyżej jedno rozwiązanie. Para $x = 1$ i $y = 2$ jest faktycznie rozwiązaniem układu równań, co można pokazać przez podstawienie. Układ równań jest oznaczony.

Uwaga 390 *Zapis równań z góry na dół oznacza, że „dolne" równanie wynika z „górnego". Jeśli zapisane w ten sposób równania są równoważne i chcemy to zaznaczyć (np. po to, by nie trzeba było podstawiać rozwiązania), należy to zrobić, używając znaku równoważności („$\Longleftrightarrow$").*

2.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & - & z & = & -1 \end{array}$$

Ostatnie równanie jest przeciwne do pierwszego, jest zatem automatycznie spełnione, jeśli spełnione jest pierwsze równanie. Odejmowanie i dodawanie pierwszych dwóch równań daje

$$\begin{array}{rcrcrcrl} & - & 2y & & & = & 0 & / : (-2) \\ 2x & & & + & 2z & = & 2 & / : 2 \\ \\ & & y & & & = & 0 & \\ x & & & + & z & = & 1 & \\ \\ & & y & & & = & 0 & \\ x & & & & & = & 1 - z & . \end{array}$$

Rozwiązanie musi być postaci $(1 - z, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$. Przez podstawienie sprawdza się, że każda taka trójka liczb fakycznie spełnia układ równań. Jest to jednoparametrowa rodzina rozwiązań, *a układ taki nazywamy* nieoznaczonym.

3.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & 5y & + & 5z & = & -3 \end{array}$$

Pierwsze równanie pozostaje niezmienione, od drugiego odejmujemy pierwsze, od trzeciego odejmujemy pierwsze:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & 2y & - & 2z & = & 1 \\ & - & 4y & + & 4z & = & -3. \end{array}$$

Suma dwukrotności drugiego równania i trzeciego równania ma postać

$$0 = -1.$$

Równanie to jest nierozwiązywalne, zatem zały układ jest nierozwiązywalny. Nazywamy go sprzecznym.

4.

$$\begin{array}{rccccccc} I: & x & - & y & + & z & = & 0 \\ II: & x & + & y & - & z & = & 1 \\ III: & x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccc} I+II: & 2x & & & & & = & 1 \\ I+II-2\cdot III: & & - & 2y & - & 2z & = & 1 \\ III: & x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

Rozwiązaniem przekształconego układu jest $x = 1/2$, $y = -1/2$, $z = 0$. Jednak ta trójka liczb nie spełnia układu wyjściowego. Jednocześnie przy tego rodzaju przekształceniach jest oczywiste, że rozwiązanie układu wyjściowego jest jednocześnie rozwiązaniem układuprzekształconego. Jednak skoro istnieje rozwiąznie układu przekształcoengo, niebk edące rozwiązaniem układu wyjściowego, te układy nie są równoważne. Przekształcenia nie są odwracalne. Patrz również: uwaga po pierwszym przykładzie.

Definicja 391 Równanie liniowe *z n niewiadomymi x_1, x_2, ..., x_n jest równaniem postaci*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + A - nx_n = b$$

o współczynnikach *a_1, a_2, ..., a_n oraz b (*współczynnik wolny*). Jeśli $b = 0$, równanie nazywamy* jednorodnym. *Układ m równań liniowych*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

nazywamy jednorodnym, *jeśli $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$. Zapisujemy go również w postaci*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = b_k, \qquad k = 1, 2, \dots, m.$$

Rozwiązaniem *układu równań jest ciąg liczb takich, że po podstawieniu ich za x_1, x_2, ..., x_n uzyskujemy m prawdziwych równości.*

Uwaga 392 *Jednorodny układ równań posiada zawsze rozwiązanie zerowe.*

Układ równań liniowych jest jednoznacznie wyznaczony przez tablicę liczb

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

oraz wektor

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Definicja 393 *Tablice postaci* (2) *nazywamy* macierzami *rozmiaru* $m \times n$. *Macierz* A *nazywa się* macierzą współczynników *układu równań, a* $m \times (n+1)$ *macierz*

$$A^R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{3}$$

rozszerzoną (uzupełnioną) macierzą współczynników. B *to* kolumna wyrazów wolnych.

Definicja 394 *Niech* z_k *oznacza* k*–ty wiersz rozszerzonej macierzy współczynników układu równań. Następujące przekształcenia:*

ZI zastąpienie pewnego wiersza jesgo λ*–krotnością* $(\lambda \neq 0)$*:*

$$z_k' = \lambda z_k,$$

ZII dodanie λ*–krotności pewnego wiersza do innego wiersza:*

$$z_l' = z_l + \lambda z_k, \quad k \neq l,$$

ZIII zamana dwóch wierszy:

$$z_k' = z_l, \quad z_l' = z_k$$

nazywamy elementarnymi przekształceniami wierszy macierzy A^R *(*operacjami elementarnymi na wierszach*). Analogicznie definiujemy elementarne przkształcenia kolumn (SI–SIII) macierzy.*

Twierdzenie 395 *Przekształcenia elemantarne wierszy są odwracalne za pomocą przekształceń elementarnych i nie zmieniają zbioru rozwiązań układu równań.*

Przekształcenia odwrotne do przekształceń elementarnych:
do (ZI): $z_k = (1/\lambda) z_k'$,
do (ZII): $z_l = z_l' - \lambda z_k$,
do (ZIII): ponowna zamiana tych samych wierszy.

Uwaga 396 *Spośród przkształceń elementarnych kolumn do rozwiązywania układów równań stosuje się zamianę dwóch kolumn (poza kolumną wolnych współczynników). Zmienia to wprawdzie zbiór rozwiązań równania, ale w sposób kontrolowany, tzn. poprzez zamianęniewiadomych.*

Gaussa metoda eliminacji

Do rozwiązywania układów równań liniowych stosuje się następujący algorytm:
Krok pierwszy. Ze wszystkich równań poza pierwszym zostaje za pomocą przekształceń elementarnych wyeliminowana pierwsza niewiadoma.

1. Jeśli wszystkie współczynniki równania są równe zero, nie przekształcamy układu.

2. Jeśli wszystkie współczynniki pierwszej kolumny układu są równe zero, zamieniamy tę kolumnę z inną kolumną (poza kolumną wyrazów wolnych), w której nie wszystkie współczynniki są równe zero.

3. Zamieniamy wiersze tak, by współczynnik $(1,1)$ (w pierwszej kolmnie, pierszym wierszu) był niezerowy.

4. Po kolei przeprowadzamy następujące przekształcenia elementarne:

$$z_2' = z_2 - l_{21}z_1,\ l_{21} = a_{21}, a_{11} \qquad (\text{wówczas } a_{21}' = a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{11} = 0),$$
$$z_3' = z_3 - l_{31}z_1,\ l_{31} = a_{31}, a_{11} \qquad (\text{wówczas } a_{31}' = a_{31} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot a_{11} = 0),$$
$$\ldots\ldots$$
$$z_m' = z_m - l_{m1}z_1,\ l_{m1} = a_{m1}, a_{11} \qquad (\text{wówczas } a_{m1}' = a_{m1} - \frac{a_{m1}}{a_{11}} \cdot a_{11} = 0).$$

Krok drugi. Postępujemy analogicznie aż do momentu, kiedy dotrzemy do ostatniego wiersza bądź ostatniej kolumny macierzy A^R.

Twierdzenie 397 *Za pomocą elementarnych przekształceń ZI–ZIII oraz SIII można rozszerzonę macierz układu równań liniowych przekształcić do* postaci schodkowej

$$\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & \ldots & a_{1r}' & a_{1,r+1}' & \ldots & b_1' \\ 0 & a_{22}' & \ldots & a_{2r}' & a_{2,r+1}' & \ldots & b_2' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr}' & a_{r,r+1}' & \ldots & b_r' \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & b_{r+1}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Przy tym zachodzi $a_{jj} \neq 0$ dla $j = 1, 2, \ldots, r$ oraz $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$.

Takie przekształcenie nazywa się *eliminacją Gaussa.*

Twierdzenie 398 *Układ równań liniowych jest rozwiązywalny wtedy i tylko wtedy, gdy w macierzy* (4) *zachodzi $b_k' = 0$ dla $k = r+1, \ldots, m$.*

Rozwiązanie $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ równania o macierzy rozszerzonej (3) (będące permutacją – tzn. ciągiem o innej kolejności elementów – rozwiązania układu wyjściowego) dane jest *rekurencyjnie*:

$$\begin{aligned} y_n &= \lambda_n, \qquad \lambda_n \in \mathbb{R}, \\ y_{n-1} &= \lambda_{n-1}, \qquad \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}, \\ &\ldots \\ y_{r+1} &= \lambda_{r+1}, \qquad \lambda_{r+1} \in \mathbb{R}, \\ y_r &= \frac{1}{a_{rr}'}\left(-a_{r,r+1}'y_{r+1} - \cdots - a_{rn}'y_n + b_r\right), \\ y_{r-1} &= \frac{1}{a_{r-1,r-1}'}\left(-a_{r-1,r}'y_r - \cdots - a_{r-1,n}'y_n + b_{r-1}\right), \\ &\ldots \\ y_1 &= \frac{1}{a_{11}'}\left(-a_{12}'y_2 - \cdots - a_{1n}'y_n + b_1\right). \end{aligned}$$

Uwaga 399 *Innym sposobem rozwiązania układu równań jest doprowadzenie macierzy schodkowej za pomocą przekształceń elementarnych do postaci*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & b'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Jeśli $b'_{r+1} = 0$, *rozwiązaniem układu równań jest* $(b'_1, b'_2, \dots, b'_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ *dla* $k = r+1, \dots, n$. *W przeciwnym wypadku układ jest sprzeczny.*

Przykład 400 *Rozwiąż układy równań:*

1.
$$\begin{cases} 8x + 6y + 5z + 2t = 21, \\ 3x + 3y + 2z + t = 10, \\ 4x + 2y + 3z + t = 8, \\ 3x + 5y + z + t = 15, \\ 7x + 4y + 5z + 2t = 18. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 6x + 4y + 5z + 2t + 3u = 1, \\ 3x + 2y + 4z + t + 2u = 3, \\ 3x + 2y - 2z + t = -7, \\ 9x + 6y + z + 3t + 2u = 2. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x + y + 3z - 2t + 3u = 1, \\ 2x + 2y + 4z - t + 3u = 2, \\ 3x + 3y + 5z - 2t + 3u = 1, \\ 2x + 2y + 8z - 3t + 9u = 2. \end{cases}$$

Elementy geometrii analitycznej

Wektory

Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ stanowią wszystkie uporządkowane trójki (x, y, z) liczb rzeczywistych. Możliwe są różne interpretacje geometryczne:

1) jako zbiór punktów w przestrzeni,

2) jako zbiór wektorów zaczepionych w przestrzeni,

3) jako zbiór wektorów swobodnych w przestrzeni.

Analogicznie dla przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Definicja 401 *1) Mówimy, że punkty A, B, C przestrzeni $\mathbb{R}^3$ są* współliniowe, *gdy istnieje prosta, do której należą te punkty.*

2) Mówimy, że punkty A, B, C, D przestrzeni $\mathbb{R}^3$ są współpłaszczyznowe, *gdy istnieje płaszczyzna, do której należą te punkty.*

3) Mówimy, że wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ są współliniowe *(*równoległe*), gdy istnieje prosta, w której zawarte są te wektory.*

4) Mówimy, że wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ są współpłaszczyznowe *(*równoległe*), gdy istnieje płaszczyzna, w której zawarte są te wektory.*

Twierdzenie 402 *1) Wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby rzeczywiste α, β takie, że*

$$\alpha^2 + \beta^2 > 0 \qquad \textit{oraz} \qquad \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}.$$

2) Wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ są współpłaszczyznowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby rzeczywiste α, β, γ takie, że

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0 \qquad \textit{oraz} \qquad \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}.$$

Innymi słowy, współliniowość i współpłaszczyznowość odpowiadają liniowej zależności.

Definicja 403 układem współrzędnych *w przestrzeni nazywamy trzy ostalone proste OX, OY, OZ, przecinające się w jednym punkcie 0, które są wzajemnie prostopadłe. Taki układ oznaczamy przez $OXYZ$, a proste nazywamy* osiami.

Będziemy korzystać z prwoskrętnych układów współrzędnych.

Definicja 404 *Wektory* $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0$ *i* $\vec{k} = (0,0,1)$ *nazywamy* wersorami *odpowiednio na osiach* OX, OY, OZ.

Definicja 405 długość wektora $\vec{v} = (x,y,z)$ *określona jest wzorem*

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Przykład 406 *Oblicz długości wektorów* $\vec{u} = (-3,0,4)$; $\vec{v} = (\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{31})$; $\vec{AB}$, *gdzie* $A = (2,1,-3)$, $B = (-1,1,4)$.

Twierdzenie 407 *Niech* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *będą wektorami w* $\mathbb{R}^3$ *oraz niech* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Wówczas:*

1) $|\vec{u}| \geq 0$ *oraz* $|\vec{u}| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$;

2) $|\alpha\vec{u}| = |\alpha| \cdot |\vec{u}|$;

3) $|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$;

4) $\big||\vec{u}| - |\vec{v}|\big| \leq |\vec{u}-\vec{v}|$.

Iloczyn skalarny

Definicja 408 *Niech* $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$ *będą dowolnymi wektorami w* $\mathbb{R}^3$. *Iloczym skalarny wektorów* $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$ *dany jest wzorem*

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\measuredangle(\vec{u},\vec{v}).$$

Twierdzenie 409 *Niech* $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ *oraz* $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ *będą wektorami w* $\mathbb{R}^3$. *Wówczas*

$$\vec{u} \circ \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v.$$

Przykład 410 *Oblicz ką ty między parami wektorów:*

a) $\vec{u} = (3,-1,2)$, $\vec{v} = (4,2,-5)$;

b) $\vec{u} = (3,-1,2)$, $\vec{v} = (1,2,3)$.

Twierdzenie 411 *Niech* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *będą wektorami w* $\mathbb{R}^3$ *oraz niech* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Wówczas:*

1) $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$;

2) $(\alpha\vec{u}) \circ \vec{v} = \alpha(\vec{u} \circ \vec{v})$;

3) $\vec{u} \circ \vec{u} = |\vec{u}|^2$;

4) $(\vec{u}+\vec{v}) \circ \vec{w} = \vec{u} \circ \vec{w} + \vec{v} \circ \vec{w}$;

5) $|\vec{u} \circ \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$;

6) $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \circ \vec{v} = 0$.

Przykład 412 *Oblicz iloczyn skalarny wektorów* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$, *jeżeli* $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 5\vec{q}$, *przy czym* $\vec{p}$ *i* $\vec{q}$ *są wzajemnie prostopadłymi wersorami.*

Iloczyn wektorowy

Definicja 413 *Niech $\vec{u}$ i $\vec{v}$ będą niewspółliniowymi wektorami w $\mathbb{R}^3$. Iloczynem wektorowym uporządkowanej pary wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy wektor $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, który spełnia warunki:*

1) *jest prostopadły do płaszczyzny rozpiętej na wektorach $\vec{u}$ i $\vec{v}$;*

2) *jego długość jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{u}$ i $\vec{v}$, tzn.*

$$|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \measuredangle(\vec{u}, \vec{v});$$

3) *orientacja trójki wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych.*

Twierdzenie 414 *Niech $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ oraz $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ będą wektorami w $\mathbb{R}^3$. Wtedy*

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix},$$

gdzie $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ oznaczają wersory odpowiednio na osiach OX, OY, OZ.

Przykład 415 *Oblicz iloczyny wektorowe par wektorów:*

1) $\vec{u} = (-1, 2, 5)$, $\vec{v} = (2, 0, -3)$;

2) $\vec{u} = (-1, -3, 4)$, $\vec{v} = (, 5, 6) - 2$.

Twierdzenie 416 *Niech $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ będą dowolymi wektorami w $\mathbb{R}^3$ oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wówczas*

1) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$;

2) $(\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \times \vec{v})$;

3) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$;

4) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$;

5) $|\vec{u} \times \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$;

6) $\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Przykład 417 *Oblicz pola podanych obszarów:*

1) *równoległobok rozpięty na wektorach $\vec{u} = (0, 3, -2)$ i $\vec{v} = (-1, 2, 5)$;*

2) *trójkąt o wierzchołkach $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, -1, 2)$, $C = (0, 4, 0)$.*

Przykład 418 *Uzasadnij tożsamość $(\vec{p} + \vec{q}) \times (\vec{p} - \vec{q}) = -2(\vec{p} \times \vec{q})$, gdzie $\vec{p}$, $\vec{q} \in athbbR^3$. Następnie pokaż, że pole S równoległoboku o przekątnych $\vec{p}$, $\vec{q}$ wyraża się wzorem*

$$S = \frac{1}{2}|\vec{p} \times \vec{q}|.$$

Iloczyn mieszany

Definicja 419 *Niech $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ będą wektorami w $\mathbb{R}^3$. Iloczyn mieszany uporządkowanej trójki wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ dany jest wzorem*

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}.$$

Przykład 420 *Korzystając z definicji, oblicz $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dla $\vec{u} = (-2, 1, 3)$, $\vec{v} = (4, 3, -1)$, $\vec{w} = (1, 0, -2)$.*

Uwaga 421 *Iloczyn mieszany wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jest (z dokładnością) do znaku równy objętości równoległościanu rozpiętego na tych wektorach:*

$$V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|.$$

Twierdzenie 422 *Niech $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$, $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$, $\vec{w} = (x_w, y_w, z_w)$ będąwektorami w $\mathbb{R}^3$. Wówczas*

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}.$$

Przykład 423 *Oblicz objętość czworościanu o wierzchołkach $P = (1, 1, 1)$, $Q = (1, 2, 3)$, $R = (-1, 1, 0)$, $S = (0, 0, 1)$.*

Twierdzenie 424 *Niech $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{r}$ będą wektorami w $\mathbb{R}^3$ oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wówczas*

1) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$;
2) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$;
3) $(\vec{u} + \vec{r}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{r}, \vec{v}, \vec{w})$;
4) $(\alpha\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \alpha(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$;
5) *wektory* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *leżą w jednej płaszczyźnie* $\iff$ $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$;
6) $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$.

Przykład 425
1) *Oblicz wysokość trójkąta ABC opuszczonę z wierzchłka C, jeśli $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 2, 2)$, $C = (3, 4, 5)$.*
2) *Oblicz wysokość czworościanu $ABCD$ opuszczoną z wierzchołka D, jeśli $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 2, 3)$, $D = (3, 4, 5)$.*

Płaszczyzna w przestrzeni

Równanie normalne płaszczyzny

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym $\vec{r}_0$ i prostopadłej do wektora $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$ ma postać

$$\pi : (\vec{r} - \vec{r}_0) \circ \vec{n} = 0,$$

gdzie $\circ$ oznacza iloczyn skalarny wektorów, a $\vec{r} = (x, y, z)$ jest wektorem wodzącym płaszczyzny π. Można to równanie zapisać w postaci

$$\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Jest to *równanie normalne płaszczyzny* (w postaci wektorowej i w postaci rozwiniętej).

Przykład 426 *Równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt* $P_0 = (-1, 2, 0)$ *i prostopadłej do wektora* $\vec{n} = (2, -3, 1)$ *ma postać*

$$2(x+1) - 3(y-2) + z = 0.$$

Równanie ogólne płaszczyzny

Każde równanie postaci

$$\pi : \; Ax + By + Cz + D = 0,$$

gdzie $|A| + |B| + |C| > 0$, przedstawia płaszczyznę. Płaszczyzna ta ma wektor normalny $\vec{n} = (A, B, C)$ i przecina oś OZ w punkcie $z = -\frac{D}{C}$, o ile $C \neq 0$.

Przykład 427 *Napisz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt* $P = (3, -2, 5)$ *i równoległej do płaszczyzny* YZ.

Rozwiązanie. $\vec{n} = (1, 0, 0)$, bo płaszczyzna ma być równoległa do płaszczyzny YZ. Stąd $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$ i dalej $D = -3A + 2B - 5C = -3$. Zatem

$$\pi : \; x - 3 = 0.$$

Równanie parametryczne płaszczyzny

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym $\vec{r}_0$ i rozpiętej na niewspółliniowych wektorach $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ oraz $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ ma postać

$$\pi : \; \vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{u} + t\vec{v}, \qquad \text{gdzie } s, t \in \mathbb{R}\,.$$

lub

$$\pi : \; (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2), \qquad \text{gdzie } s, t \in \mathbb{R}\,.$$

Przykład 428 *Równanie parametryczne płaszczyzny przechodzącej przez początek układu współrzędnych i równoległej do wektorów* $\vec{u}_1 = (1, 2, 3)$ *oraz* $\vec{u}_2 = (0, -1, 2)$ *ma postać*

$$\pi : \; \vec{r} = s(1, 2, 3) + t(0, -1, 2), \qquad \textit{gdzie } s, t \in \mathbb{R}\,.$$

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty $P_j = (x_j, y_j, z_j)$, $j = 1, 2, 3$, ma postać

$$\pi : \; \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Przykład 429 *Sprawdź, czy punkty* $P_1 = (1, 2, -3)$, $P_2 = (2, 3, 4)$, $P_3 = (0, 5, 4)$, $P_4 = (5, 3, 1)$ *należą do jednej płaszczyzny.*

Rozwiązanie.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

zatem punkty te nie są współpłaszczyznowe.

Równanie odcinkowe płaszczyzny

Równanie płaszczyzny π odcinającej na osiach OX, OY, OZ układu współrzędnych odpowiednio odcinki $a, b, c \neq 0$ ma postać

$$\pi : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Przykład 430 *Oblicz objętość czworościanu ograniczonego płaszczyzną $\pi : x + 2y + 3z - 6 = 0$ oraz płaszczyznami układu współrzędnych.*

Rozwiązanie. Równanie odcinkowe płaszczyzny ma postać

$$\pi : \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1.$$

Podstawą tego czworościanu jest trójkąt prostokątny o długościach przyprostokątnych 6 i 3, a wysokość czworościanu wynosi 2. Zatem jego objętość to

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\right) \cdot 2 = 6.$$

Prosta w przestrzeni

Równanie parametryczne prostej

Równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym $\vec{r}_0$ i wyznaczonej przez niezerowy wektor kierunku $\vec{v} = (a, b, c)$ ma postać

$$l : (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c), \qquad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Jest to *równanie parametryczne prostej w postaci wektorowej.*

Przykład 431 *Równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkty $P = (1, 2, 3)$ oraz $Q = (3, 2, 1)$ ma postać*

$l : (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(3-1, 2-2, 1-3),$ *czyli* $l : (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(3-1, 2-2, 1-3),$

gdzie $t \in \mathbb{R}$.

Równanie kierunkowe prostej

Równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i wyznaczonej przez niezerowy wektor kierunku $\vec{v} = (a, b, c)$ ma postać

$$l : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Ten sposób zapisu równania parametrycznego prostej nazywamy jej *równaniem kierunkowym.*

Uwaga 432 *Aby nie ograniczać zakresu stosowania równania kierunkowego prostej przyjmujemy, że w mianownikach powyższych ułamków mogą wystąpić zera.*

Przykład 433 *Znajdź punkty przecięcia prostej $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-5}{1}$ z płaszczyznami układu współrzędnych.*

Rozwiązanie. Dla $x = 0$ mamy $\frac{-1}{2} = \frac{y+2}{4}$ oraz $\frac{-1}{2} = \frac{z-5}{1}$, czyli $y = -4$ i $z = \frac{9}{2}$. Punktem przecięcia prostej z płaszczyzną OYZ jest zatem $(0, -4, 9/2)$. Podobnie dla $y = 0$ otrzymujemy punkt przecięcia z płaszczyzną OXZ o współrzędnych $(2, 0, 11/2)$ oraz dla $z = 0$ punkt przecięcia z płaszczyuzną OXY o wsp'ołrzędnych $(-9, -22, 0)$.